

Über das Koeffizientenproblem  
der beschränkten  
Funktionen von zwei Veränderlichen

von

ALBRECHT PFISTER

1961



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

Über das Koeffizientenproblem  
der beschränkten Funktionen von zwei Veränderlichen

Inauguraldissertation  
zur Erlangung der Doktorwürde  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Ludwig-Maximilians-Universität  
zu München

Vorgelegt  
von  
Albrecht Pfister  
aus  
München

Dezember 1960



Berichterstatter: Prof. Dr. K. Stein

Tag der mündlichen Prüfung: 22.2.1961

Fotodruck: Mikrokopie G.m.b.H. München 2, Weinstr. 4

## I n h a l t

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Einleitung .....                                                                 | 1  |
| §1. Vorbetrachtung zum reinen Koeffizientenproblem ...                           | 11 |
| §2. Die Schrankenfunktionen von zwei Veränderlichen ..                           | 15 |
| §3. Begründung für die Wahl des Dizylinders als<br>Grundgebiet .....             | 18 |
| §4. Die Extremaleigenschaft der Schrankenfunktionen ..                           | 24 |
| §5. Eine Abschätzung für $K_{mn}$ .....                                          | 28 |
| §6. Genauere Untersuchung der Beispiele<br>(m,n) = (1,1) und (m,n) = (2,1) ..... | 32 |
| §7. Hauptsatz über das reine Koeffizientenproblem ....                           | 39 |
| §8. Approximation durch Schrankenfunktionen .....                                | 43 |
| Literaturverzeichnis .....                                                       | 46 |



# E i n l e i t u n g

1. Von C. Carathéodory [1] wurde in zwei Arbeiten aus den Jahren 1907 und 1911 das folgende Koeffizientenproblem behandelt: Gegeben ist eine im Einheitskreis  $|z| < 1$  holomorphe Funktion  $f(z)$  mit der Potenzreihenentwicklung  $f(z) = \frac{1}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ . Gesucht sind notwendige und hinreichende Bedingungen an die  $c_i$  dafür, dass  $\operatorname{Re} f(z) > 0$  ist in  $|z| < 1$ .

Die von Carathéodory angegebene Lösung lässt sich so beschreiben: Man ordnet der Funktion  $f(z)$  die Punkte  $(\operatorname{Re} c_1, \operatorname{Im} c_1, \dots, \operatorname{Re} c_n, \operatorname{Im} c_n)$  in den reellen Räumen  $R^{2n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) als "Repräsentanten" zu. Bei festem  $n$  bilden die  $n$ -ten Repräsentanten aller in  $|z| < 1$  holomorphen Funktionen mit positivem Realteil einen konvexen Körper  $K_n$  im  $R^{2n}$ , d.h. eine abgeschlossene konvexe Punktmenge mit inneren Punkten. Das Problem ist zurückgeführt auf die Beschreibung der Körper  $K_n$ .

Das Überraschende ist nun, dass  $K_n$  als konvexe Hülle einer auf der Oberfläche von  $K_n$  verlaufenden "Normkurve"  $C_n$  aufgefasst werden kann.  $C_n$  hat die Parameterdarstellung  $(\cos \gamma, \sin \gamma, \dots, \cos n\gamma, \sin n\gamma)$ ,  $0 \leq \gamma < 2\pi$ .

$K_n$  ist daher die Punktmenge

$$\left\{ \left( \sum_1^n \lambda_i \cos \gamma_i, \sum_1^n \lambda_i \sin \gamma_i, \dots, \sum_1^n \lambda_i \cos n\gamma_i, \sum_1^n \lambda_i \sin n\gamma_i \right) \right\}$$

mit den Einschränkungen  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_1^n \lambda_i \leq 1$ .

Für Randpunkte von  $K_n$  ist  $\sum_1^n \lambda_i = 1$ .

Die Punkte von  $C_n$  entsprechen in umkehrbar eindeutiger Weise den Funktionen

$$f_\gamma(z) = \frac{1}{2} \frac{1 + e^{i\gamma} z}{1 - e^{i\gamma} z} \quad (0 \leq \gamma < 2\pi),$$

deren  $n$ -te Repräsentanten sie sind.  $f_\gamma(z)$  heisst Schrankenfunktion.

Mit Hilfe der Determinanten

$$\Delta_n(\lambda; c_1, \dots, c_n) = \begin{vmatrix} \lambda & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \bar{c}_1 & \lambda & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & & \cdot & & \vdots \\ \bar{c}_{n-1} & & & & c_1 \\ \bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \dots & & \lambda \end{vmatrix}$$

kann man schliesslich noch die Parameterdarstellung von  $K_n$  auf eine algebraische Darstellung umrechnen:

$(\operatorname{Re} c_1, \dots, \operatorname{Im} c_n)$  ist genau dann innerer Punkt von  $K_n$ , wenn  $\Delta_v(1; c_1, \dots, c_v) > 0$  für  $v = 1, \dots, n$ .

Die Begrenzung von  $K_n$  besteht aus einem Teil der algebraischen Fläche  $\Delta_n(1; c_1, \dots, c_n) = 0$ .

Man gewinnt daraus die folgende Lösung des Koeffizientenproblems:

(1a)  $f(z) = \frac{1}{2} + c_1 z + \dots$  ist in  $|z| < 1$  holomorph und hat dort positiven Realteil genau dann, wenn entweder

$\Delta_n(1; c_1, \dots, c_n) > 0$  für alle  $n$  oder  $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} > 0$ ,

$\Delta_n = \Delta_{n+1} = \dots = 0$  ist. Der zweite Fall tritt genau dann

ein, wenn  $f(z) = \sum_1^n \lambda_i f_{\gamma_i}(z)$  ist mit  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_1^n \lambda_i = 1$ .

In dieser Formulierung des Ergebnisses ist jedoch die Herkunft der Determinanten  $\Delta_n$  und ihre Bedeutung für die

Koeffizientenkörper  $K_n$  nicht mehr zu erkennen. Ich möchte daher (1a) als eine Lösung des "reinen" Koeffizientenproblems bezeichnen und darunter jedes System von Ungleichungen in den Koeffizienten  $c_1$  verstehen, welches notwendig und hinreichend dafür ist, dass  $f(z) = \sum_0^\infty c_1 z^1$  in  $|z| < 1$  positiven Realteil besitzt. Demgegenüber gestattet die Beweismethode von Carathéodory noch eine vollkommene Übersicht über die von den Abschnitten  $(c_1, \dots, c_n)$  gebildeten Koeffizientenkörper  $K_n$  und über die wichtige Rolle, welche die Schrankenfunktionen dabei spielen. Dies verdient besonders festgehalten zu werden:

(1b) Die Repräsentanten  $(\operatorname{Re} c_1, \dots, \operatorname{Im} c_n)$  der Funktionen mit positivem Realteil sind Punkte des konvexen Körpers  $K_n$ , dessen Inneres durch  $\Delta_\nu(1; c_1, \dots, c_\nu) > 0$ ,  $\nu = 1, \dots, n$  beschrieben wird. Die Randpunkte von  $K_n$  entsprechen umkehrbar eindeutig den Funktionen  $\sum_1^n \lambda_\nu f_{\gamma_\nu}(z)$  mit  $\lambda_\nu \geq 0$ ,  $\sum_1^n \lambda_\nu = 1$ . Jede Funktion mit positivem Realteil kann durch eine Linearkombination  $\frac{\lambda_0}{2} + \sum_1^n \lambda_\nu f_{\gamma_\nu}(z)$  ( $\lambda_\nu \geq 0$ ,  $\sum_0^n \lambda_\nu = 1$ ) so approximiert werden, dass die Entwicklungskoeffizienten bis zur Potenz  $z^n$  übereinstimmen.

2. Schur [2] hat etwas später das Koeffizientenproblem der in  $|z| < 1$  holomorphen Funktionen  $f(z)$  mit  $|f(z)| \leq 1$  behandelt und auf eine von der Carathéodoryschen völlig verschiedene Weise gelöst. Er gewinnt die Bedingungen an

die Koeffizienten von  $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$  durch das folgende Rekursionsverfahren (Schurscher Algorithmus):

$$\text{Mit } f(z) \text{ ist auch } f_1(z) = \frac{f(z) - c_0}{1 - \bar{c}_0 f(z)} \cdot \frac{1}{z} = c_0^{(1)} + c_1^{(1)} z + \dots$$

in  $|z| < 1$  holomorph und dem Betrage nach  $\leq 1$ . Fortsetzung

$$\text{dieses Verfahrens vermöge } f_n(z) = \frac{f_{n-1}(z) - c_0^{(n-1)}}{1 - \bar{c}_0^{(n-1)} f_{n-1}(z)} \cdot \frac{1}{z} =$$

$$= c_0^{(n)} + c_1^{(n)} z + \dots \text{ führt auf ein System von Koeffizienten}$$

$c_0, c_0^{(1)}, \dots, c_0^{(n)}, \dots$ , die mit den ursprünglichen

$c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  in umkehrbar eindeutiger Weise zusammenhängen. Es gilt:

$|f(z)| \leq 1$  in  $|z| < 1$  genau dann, wenn  $|c_0^{(n)}| \leq 1$  für alle  $n$ .

Falls bei dem Verfahren einmal  $|c_0^{(n)}| = 1$  ausfällt, muss es an dieser Stelle abgebrochen werden und es muss  $f_n(z) \equiv c_0^{(n)}$  sein. Dies ist genau bei den Funktionen

$$\frac{\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \dots + \bar{a}_0 z^n}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \quad \text{mit } a_0 + \dots + a_n z^n \neq 0 \text{ für } |z| \leq 1$$

der Fall. Sie heissen die Schrankenfunktionen (verschiedentlich auch Einheitsfunktionen) unter den beschränkten Funktionen.

Die Bedingungen  $|c_0^{(n)}| \leq 1$  kann man ähnlich wie bei Carathéodory auf Determinantenbedingungen umrechnen. Mit der Bezeichnung

$$D_n(\lambda; c_0, \dots, c_n) = \begin{vmatrix} \lambda & & c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ & \lambda & & & & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ & & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & & & & c_0 \\ \bar{c}_0 & & & & \lambda & & & \\ & \bar{c}_1 & \bar{c}_0 & & & \lambda & & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ \bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \dots & \bar{c}_0 & & & & \lambda \end{vmatrix} \quad \text{ergibt sich:}$$

(2a)  $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$  ist in  $|z| < 1$  beschränkt, d.h.  $|f(z)| \leq 1$  genau dann, wenn entweder  $D_n(1; c_0, \dots, c_n) > 0$  für alle  $n$  oder  $D_0, \dots, D_{n-1} > 0, D_n = D_{n+1} = \dots = 0$ .

Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn  $f$  Schrankenfunktion vom Grad  $n$  ist.

(2b) Wenn  $|f(z)| \leq 1$  ist, gibt es ein Vielfaches

$$\lambda \cdot \frac{\bar{a}_n + \dots + \bar{a}_0 z^n}{a_0 + \dots + a_n z^n} \quad (0 \leq \lambda \leq 1, a_0 + \dots + a_n z^n \neq 0 \text{ in } |z| < 1)$$

einer Schrankenfunktion, dessen Potenzreihenentwicklung mit der von  $f(z)$  bis zur Potenz  $z^n$  übereinstimmt.

3. Achieser [3] löst das Problem für die beschränkten Funktionen unter Vermeidung des Schurschen Algorithmus, indem er einfach zu  $f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$  eine Funktion

$$\lambda \cdot \frac{\bar{a}_n + \dots + \bar{a}_0 z^n}{a_0 + \dots + a_n z^n} \text{ sucht, deren Potenzreihenentwicklung mit}$$

$c_0 + \dots + c_n z^n$  beginnt. Dies führt unmittelbar auf das

Gleichungssystem  $\lambda \bar{a}_i = \sum_{v=0}^i c_v a_{i-v}$  für die  $a_i$  und damit auf die Determinante  $D_n(\lambda; c_0, \dots, c_n)$ . Notwendig für eine

nichttriviale Lösung ist  $D_n(\lambda; c_0, \dots, c_n) = 0$ . Ferner

kann man zeigen (und das ist wohl der Ersatz für den Algorithmus), dass das zum grössten Eigenwert  $\lambda^*$  gehörige Lösungssystem

$a_0, \dots, a_n$  die Eigenschaft  $a_0 + \dots + a_n z^n \neq 0$  in

$|z| < 1$  hat. Unter Verwendung einiger weiterer Eigenschaften

der Schrankenfunktionen erhält man dann wieder die Ergebnisse von 2.

(2b) kann übrigens in Analogie zu (1b) auch geometrisch ausgedrückt werden und besagt dann, dass die Repräsentanten  $(\operatorname{Re} c_0, \operatorname{Im} c_0, \dots, \operatorname{Re} c_n, \operatorname{Im} c_n)$  der Schrankenfunktionen

$$\frac{\bar{a}_n + \dots + \bar{a}_0 z^n}{a_0 + \dots + a_n z^n} \quad \text{gerade die ganze Oberfläche des konvexen}$$

Körpers erfüllen, welcher von den n-ten Repräsentanten aller in  $|z| < 1$  holomorphen und beschränkten Funktionen gebildet wird.

4. An neueren Arbeiten zu diesem Problemkreis ist die von Peschl und Erwe [4] zu nennen. Sie bringt die Lösung des Koeffizientenproblems für mehrere Funktionen von einer Veränderlichen im folgenden Sinn: Die im Einheitskreis  $|z| < 1$  holomorphen Funktionen  $f^{(v)}(z) = c_0^{(v)} + c_1^{(v)} z + \dots$  ( $v = 1, \dots, n$ ) werden zusammengefasst zu einer "Funktionenspalte"

$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$  Als Betrag wird eingeführt

$|f(z)| = \sqrt{|f^{(1)}(z)|^2 + \dots + |f^{(n)}(z)|^2}$ . Dann kann man mit Hilfe eines geeigneten Matrizenkalküls das Schwarzsche Lemma und den Schurschen Algorithmus wörtlich auf solche Funktionenspalten übertragen und erhält damit auch die Lösung des Koeffizientenproblems: Die Funktionenspalte  $f(z)$  ist im Einheitskreis konvergent und beschränkt, d.h.  $|f(z)| \leq 1$ , genau dann, wenn entweder für alle durch den Rekursionsprozess gebildeten Funktionenspalten  $f(z) = f_0(z), f_1(z), \dots, f_m(z), \dots$ ,  $|f_m(0)| < 1$  ist oder wenn  $|f_0(0)|, \dots, |f_{m-1}(0)| < 1$  und  $f_m(z) \equiv f_m(0)$  mit  $|f_m(0)| = 1$ .

5. Über das im Hinblick auf die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen interessante Koeffizientenproblem einer beschränkten Funktion von mehreren Veränderlichen scheinen bisher noch keine Ergebnisse vorzuliegen. Im folgenden wird nun sowohl das reine Koeffizientenproblem im Sinne der Aussage (2a) für eine beschränkte, im Einheitsdizylinder holomorphe Funktion von zwei Veränderlichen gelöst, als auch ein der Aussage (2b) entsprechender Approximationssatz bewiesen. Ausserdem stellt sich heraus, dass bezüglich der von gewissen Anfangskoeffizienten gebildeten Repräsentantenkörper Abweichungen von der Theorie bei einer Veränderlichen auftreten. Die Ursache dafür ist das völlig andersartige Nullstellenverhalten der Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Die Beschränkung auf den Dizylinder als Konvergenzgebiet der zu betrachtenden Potenzreihen entspringt der Notwendigkeit, die Beweise ohne den bei einer Veränderlichen so wirksamen Schurschen Algorithmus zu führen. Dessen Idee besteht ja darin, die Koeffizienten  $c_1, c_2, \dots$  der Funktion  $c_0 + c_1 z + \dots$  schrittweise an die Stelle des konstanten Glieds  $c_0$  zu bringen, für welches man die notwendige Abschätzung sofort angeben kann. Wäre dieses Verfahren auch bei einer Potenzreihe  $\sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$  in zwei Veränderlichen möglich, so müsste man zunächst die Koeffizienten  $c_{ik}$  in eine lineare Anordnung bringen. Eine solche ist aber in natürlicher Weise, d.h. ohne Auszeichnung des einen Index vor dem anderen nicht möglich. Eine andere Erklärung für das Versagen des Schurschen Algorithmus bei zwei Veränder-

lichen ist die, dass das Schwarzsche Lemma, welches dem Algorithmus zugrundeliegt, bei zwei Veränderlichen nicht in so scharfer Form gilt.

Ein Mittel, das auch bei zwei Veränderlichen noch zur Verfügung steht, sind dagegen die Schrankenfunktionen. Durch formale Übertragung findet man für sie folgende Gestalt:

$$f(z,w) = \frac{\bar{a}_{mn} + \dots + \bar{a}_{m-1,n-k} z^i w^k + \dots + \bar{a}_{00} z^m w^n}{a_{00} + \dots + a_{ik} z^i w^k + \dots + a_{mn} z^m w^n} \quad .$$

Für  $|z|=|w|=1$  ist ersichtlich auch  $|f(z,w)| = 1$ .

$|z|=|w|=1$  ist aber gerade die Bestimmungsfläche des Einheitsdizylinders. Wenn also der Nenner von  $f$  in diesem Dizylinder nicht verschwindet, ist dort  $|f| \leq 1$ .

Die Sonderstellung des Dizylinders beruht nun darauf, dass obige Schrankenfunktionen zur Approximation aller Funktionen vom Betrag  $\leq 1$  ausreichen. Für andere beschränkte Konvergenzgebiete von Potenzreihen in zwei Veränderlichen (das sind vollkommene logarithmisch konvexe Reinhardtsche Körper) gilt etwas Entsprechendes nicht. Als Verallgemeinerung der Bestimmungsfläche des Dizylinders kommt nämlich nur der sog. <sup>v</sup>Silovrand in Frage. Definiert man dann als Schrankenfunktionen zu dem gewählten Konvergenzgebiet  $K$  diejenigen Funktionen, die auf dem Silovrand von  $K$  den Betrag 1 besitzen, so stellt sich heraus, dass diese Schrankenfunktionen nur von einer einzigen Veränderlichen abhängen oder überhaupt konstant sind. Jedenfalls reichen sie zur Approximation aller in  $K$  holomorphen und beschränkten Funktionen nicht aus.

Im einzelnen gliedert sich die Arbeit folgendermassen:  
In §1 wird gezeigt, dass das reine Koeffizientenproblem verhältnismässig leicht auch bei zwei Veränderlichen gelöst werden kann und daher das Hauptinteresse auf den Zusammenhang zwischen Koeffizientenkörpern und Schrankenfunktionen zu legen ist. §2 bringt eine allgemeine Charakterisierung der Schrankenfunktionen im Dizylinder, §3 die Begründung für die Wahl des Dizylinders als Grundgebiet. In §4 wird die Beziehung der Schrankenfunktionen zu den Koeffizientenkörpern durch einen Satz hergestellt, der im wesentlichen besagt, dass die Repräsentanten der Schrankenfunktionen vom Grade  $(m,n)$  Randpunkte des Koeffizientenkörpers mit denselben Gradzahlen sind. Daraus ergibt sich in §5 eine wichtige Abschätzung für die Koeffizientenkörper. §6 dient der Untersuchung der einfachsten Beispiele  $(m,n) = (1,1)$  und  $(m,n) = (2,1)$ , wobei sich die erwähnten Abweichungen von den Verhältnissen bei einer Veränderlichen herausstellen. In §7 geben wir als Verbesserung der Ergebnisse von §1 eine weitere Lösung des reinen Koeffizientenproblems an. Vollkommen unabhängig von den vorhergehenden Teilen ist §8, wo gezeigt wird, dass man jede unimodular beschränkte Funktion in einem kompakten Teil des Dizylinders beliebig genau durch Schrankenfunktionen approximieren kann. Schliesslich möchte ich erwähnen, dass die Beschränkung auf zwei Veränderliche rein technischer Art ist. Die Beweise lassen meistens unmittelbar erkennen, dass eine Übertragung auf mehrere Veränderliche möglich ist.

Durchgehende Bezeichnungen:

$G^n$  = n-dimensionaler komplexer Raum

$Z = \{(z, w) : |z| < 1, |w| < 1\}$  Einheitsdizylinder

$\overline{Z} = \{(z, w) : |z| \leq 1, |w| \leq 1\}$  abgeschlossene Hülle von  $Z$

$B = \{(z, w) : |z| = |w| = 1\}$  Bestimmungsfläche von  $Z$

$F = \{f: f(z, w) \text{ holomorph und } |f(z, w)| \leq 1 \text{ in } Z\}$

Ist  $f(z, w) = \sum_{i, k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$ , so heisst der Punkt

$\tau_{mn} = (c_{00}, \dots, c_{m0}; \dots; c_{0n}, \dots, c_{mn}) \in C^{(m+1)(n+1)}$  der

$(m, n)$ -te Repräsentant von  $f$ .

$K_{mn} = \{\tau_{mn} : \tau_{mn} \text{ (m,n)-ter Repräsentant einer Funktion } f \in F\}$

$f$  beschränkt bedeute stets  $|f| \leq 1$ .

Den Herren Professoren Dr. G. Aumann und Dr. K. Stein danke ich für ihr lebhaftes Interesse an dieser Arbeit und wertvolle Anregungen.

# §1. Vorbetrachtung zum reinen Koeffizientenproblem.

Es sollen hier zwei einfache Lösungen des reinen Koeffizientenproblems angegeben werden, um klarzustellen, dass die Hauptbedeutung der Resultate von Carathéodory und Schur in der Ermittlung der Koeffizientenkörper und der Approximationseigenschaft der Schrankenfunktionen liegt. Die erste Lösung bezieht sich auf beschränkte Funktionen einer Veränderlichen im Einheitskreis:

$f(z)$  sei holomorph in  $|z| < 1$  und nicht konstant. Dann gilt  $|f(z)| < 1$  in  $|z| < 1$  genau dann, wenn  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^{2n} d\varphi < 1$  für  $r < 1$  und alle  $n = 1, 2, \dots$

Wir brauchen nur die Richtung von rechts nach links zu beweisen, da die andere trivial ist. Angenommen, es gibt ein  $z_0$  ( $|z_0| < 1$ ) mit  $|f(z_0)| \geq 1$ . Dann existiert nach dem Maximumprinzip ein  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  ( $r_1 < 1$ ) mit  $|f(z_1)| > 1$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  ein Intervall  $\varphi_0 < \varphi < \varphi_2$ , so dass sogar  $|f(r_1 e^{i\varphi})| \geq R > 1$  für alle  $\varphi$  aus diesem Intervall. Daraus folgt aber.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\varphi})|^{2n} d\varphi \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_2} |f(r_1 e^{i\varphi})|^{2n} d\varphi \geq \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2\pi} R^{2n} > 1$$

für hinreichend grosses  $n$ , also ein Widerspruch.

Für  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$  ist weiter

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^{2n} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{\beta, \gamma=0}^{\infty} c_{\beta} \bar{c}_{\gamma} r^{\beta+\gamma} e^{i(\beta-\gamma)\varphi} \right)^n d\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum'_{j=1}^n \prod_{\beta_j, \gamma_j} c_{\beta_j} \bar{c}_{\gamma_j} \right) r^{2k}$$

wobei sich die  $\sum'$  über alle  $\beta_j, \gamma_j$  mit  $\sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{j=1}^n \gamma_j = k$  erstreckt. Setzt man noch den Ausdruck in der Klammer gleich  $p_k^{(n)}$ , so gilt

Satz 1.  $|f(z)| \leq 1$  in  $|z| < 1$  genau dann, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(n)} \leq 1$  für  $n = 1, 2, \dots$

Damit ist das reine Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen von einer Veränderlichen in sehr einfacher Weise gelöst, und ausserdem lässt sich diese Methode offenbar sofort auf beschränkte Funktionen mehrerer Veränderlichen übertragen, sofern man den Einheitspolyzylinder als Konvergenzgebiet zugrundelegt. Beim Vergleich mit dem Resultat (2a) der Einleitung fällt jedoch auf, dass hier bereits in jeder einzelnen Ungleichung unendlich viele Koeffizienten  $c_{\beta}$  auftreten.

Es ist daher wünschenswert, auch noch eine Lösung anzugeben, die diesen Nachteil nicht besitzt. Bei zwei Veränderlichen erhält man eine solche Lösung durch Kombination der Aussagen (1a) und (2a) der Einleitung:

Sei  $f(z,w) = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k \in F$ . Dann gilt

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi}, re^{i\psi})|^2 d\varphi d\psi = \sum_{i,k=0}^{\infty} |c_{ik}|^2 r^{2(i+k)} \leq 1 \text{ für jedes } r < 1.$$

$\sum_{i,k=0}^{\infty} |c_{ik}|^2 \leq 1$  ist also eine notwendige Bedingung für  $f \in F$ . Falls ferner  $f(z,0)$  eine Schrankenfunktion der einen Veränderlichen  $z$  ist, gilt  $|f(z,0)| = 1$  für  $|z| = 1$  und damit  $\sum_{i=0}^{\infty} |c_{i0}|^2 = 1$ . Daher muss  $c_{ik} = 0$  sein für alle  $(i,k)$  mit  $k > 0$ , d.h.  $f(z,w) \equiv f(z,0)$ . Dieser Fall sei im folgenden ausgeschlossen.

Ableitung der Koeffizientenbedingungen:

Sei  $f_t(z) = f(z,tz)$ ,  $|t| \leq 1$ . Nach Aussage (2a) der Einleitung gilt dann

$$D_n(1; c_{00}, c_{10} + t c_{01}, \dots, c_{n0} + t c_{n-1,1} + \dots + t^n c_{0n}) \geq 0 \text{ für } n = 0, 1, \dots$$

$D_n$  ist ein reellwertiges Polynom in den Veränderlichen  $t, \bar{t}$ ,  $c_{ik}, \bar{c}_{ik}$  und hat daher die Gestalt

$$(1) \quad D_n = \sum_{j=1}^{N(n)} \bar{d}_j^{(n)} \bar{t}^j + d_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{N(n)} d_j^{(n)} t^j.$$

Dabei ist  $N(n)$  der Grad von  $D_n$  in  $t$ , die  $d_j^{(n)}$  sind Polynome in den  $c_{ik}$ ,  $\bar{c}_{ik}$ , insbesondere  $d_0^{(n)}$  reellwertig.  $D_n \geq 0$  ist gleichbedeutend damit, dass das Polynom  $\widetilde{D}_n(t) = \frac{1}{2}d_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{N(n)} d_j^{(n)} t^j$  für  $|t| \leq 1$  nichtnegativen Realteil besitzt. Wäre nun  $d_0^{(n)} = 0$ , so müsste nach (2a) auch  $d_0^{(m)} = 0$  sein für  $m > n$ , also  $f_0(z)$  eine Schrankenfunktion. Da dieser Fall ausgeschlossen wurde, ist  $d_0^{(n)} > 0$  für alle  $n$  und wir können auf  $\widetilde{D}_n(t)$  die Aussage (1a) der Einleitung anwenden, weil dann  $\widetilde{D}_n(t)$  für  $|t| < 1$  sogar positiven Realteil hat:

$$(2) \quad \Delta_m(1; \frac{d_1^{(n)}}{d_0^{(n)}}, \dots, \frac{d_m^{(n)}}{d_0^{(n)}}) > 0 \text{ für } m = 1, 2, \dots,$$

wobei  $d_m^{(n)} = 0$  gesetzt ist für  $m > N(n)$ . Der Fall  $\Delta_m = 0$  kann dabei nicht auftreten, weil  $\widetilde{D}_n(t)$  keine Schrankenfunktion ist.

Wir wollen nun zeigen, dass bei gegebenen Koeffizienten  $c_{ik}$  die daraus zu berechnenden Bedingungen

$$d_0^{(n)} > 0, \Delta_m(1; \frac{d_1^{(n)}}{d_0^{(n)}}, \dots, \frac{d_m^{(n)}}{d_0^{(n)}}) > 0 \quad (n = 0, 1, \dots; m = 1, 2, \dots)$$

auch hinreichend sind für  $f = \sum_0^\infty c_{ik} z^i \bar{w}^k \in F$ . Zunächst folgt nach (1a), dass  $\widetilde{D}_n(t)$  positiven Realteil hat für  $|t| < 1$ , also auch  $D_n(1; c_{00}, c_{10} + t c_{01}, \dots, c_{n0} + \dots + t^n c_{0n}) > 0$  für  $|t| < 1$  und alle  $n$ . Daraus ergibt sich nach (2a), dass

$$f_t(z) = c_{00} + (c_{10} + t c_{01})z + \dots + (c_{n0} + \dots + t^n c_{0n})z^n + \dots$$

für festes  $t$ ,  $|t| < 1$ , in  $|z| < 1$  konvergiert und eine holomorphe Funktion vom Betrage  $\leq 1$  darstellt. Insbesondere ist dann

$$|c_{m0} + c_{m-1,1}t + \dots + c_{0m}t^m| \leq 1 \text{ für jedes } m. \text{ Bei festem } m \text{ folgt}$$

aus der Gültigkeit dieser Ungleichung für alle  $t$  mit  $|t| < 1$  weiter  $|c_{m-\mu, \mu}| \leq 1$ . Also ist  $|c_{ik}| \leq 1$  für alle  $(i, k)$ . Vermöge der Abschätzung  $\sum_{i, k=0}^{\infty} |c_{ik} z^i w^k| \leq \sum_{i, k=0}^{\infty} |z|^i |w|^k = \frac{1}{1-|z|} \frac{1}{1-|w|}$  ergibt sich daraus sofort die absolute Konvergenz von  $f(z, w) = \sum_{i, k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$  im Dizylinder  $Z$ . Aus dem Maximumprinzip folgt schliesslich noch, dass es zu jedem festen Punkt  $(z_0, w_0) \in Z$  einen Punkt  $(z_1, w_1) \in Z$  mit  $w_1 = tz_1$ ,  $|t| < 1$  gibt, so dass  $|f(z_0, w_0)| \leq |f(z_1, w_1)|$  ist. Nach (2a) gilt  $|f(z_1, tz_1)| \leq 1$ , womit auch die Beschränktheit von  $f(z, w)$  nachgewiesen ist.

Satz 2.  $f(z, w) = \sum_{i, k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$  gehört zu  $F$  genau dann, wenn entweder  $d_0^{(n)} > 0$ ,  $\Delta_m(1; \frac{d_1^{(n)}}{d_0^{(n)}}, \dots, \frac{d_m^{(n)}}{d_0^{(n)}}) > 0$  für alle  $n = 0, 1, \dots$ ;  $m = 1, 2, \dots$  oder  $c_{ik} = 0$  für  $k > 0$  und  $d_0^{(0)}, \dots, d_0^{(n-1)} > 0$ ,  $d_0^{(n)} = d_0^{(n+1)} = \dots = 0$  ist. Dabei sind  $d_0^{(n)}$  und  $\Delta_m$  die aus (1) und (2) zu berechnenden Polynome bzw. rationalen Funktionen der Koeffizienten  $c_{ik}$ ,  $\bar{c}_{ik}$ .

Man sieht unmittelbar, dass auch diese Beweismethode schrittweise auf mehrere Veränderliche ausgedehnt werden kann, indem man  $z_n = tz_{n-1}$  setzt und die für  $n-1$  Veränderliche gültigen Ungleichungen sowie (1a) verwendet. Eine dritte, vollkommen symmetrische Lösung des reinen Koeffizientenproblems wird sich in §7 ergeben.

## §2. Die Schrankenfunktionen von zwei Veränderlichen.

Definition. Eine rationale Funktion  $f(z,w)$  heisst Schrankenfunktion (genauer:  $(m,n)$ -Schrankenfunktion), wenn sie die Gestalt

$$f(z,w) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \bar{a}_{m-i,n-k} z^i w^k}{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} z^i w^k} \quad \text{hat und der Nenner innerhalb des}$$

Dizylinders  $Z$  nicht verschwindet.  $f$  ist durch das Nennerpolynom  $P(z,w)$  und die Gradzahlen  $m,n$  (welche nicht notwendig die genauen Grade von  $P$  in  $z$  und  $w$  sein müssen) eindeutig bestimmt,

wir schreiben kurz  $f(z,w) = \frac{P^*(z,w)}{P(z,w)}$ .

Satz 3. Jede Schrankenfunktion gehört zu  $F$ .

Falls nämlich  $P(z,w) \neq 0$  in  $\bar{Z}$ , gilt nach dem Maximumprinzip, dass  $f$  das Maximum seines Betrages auf der Bestimmungsfläche  $B$  des Dizylinders annimmt. Dort ist aber  $\bar{z}^m \bar{w}^n P^*(z,w) = \overline{P(z,w)}$ , also  $|f(z,w)| = 1$ .

Falls  $P(z,w)$  auf dem Rand von  $Z$  Nullstellen besitzt, betrachten wir zunächst  $P_r(z,w) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} r^{i+k} z^i w^k$ . Für  $r < 1$

ist dann  $f_r = \frac{P_r^*}{P_r}$  eine in  $\bar{Z}$  reguläre Schrankenfunktion und

damit  $|f_r(z,w)| \leq 1$  in  $Z$ . Weiter ist für jeden festen Punkt  $(z,w) \in Z$   $f(z,w) = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(z,w)$ , also auch  $|f(z,w)| \leq 1$ .

Als Ergänzung beweisen wir noch

Satz 4. Jede in  $Z$  holomorphe, in  $\bar{Z}$  stetige Funktion  $f(z,w)$ , deren Betrag auf ganz  $B$  identisch 1 ist, ist eine Schrankenfunktion.

Beweis:

a) Sei  $f(z, w) = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$  in  $Z$ . Dann wird durch  $g(\frac{1}{z}, \frac{1}{w}) = \frac{1}{f(z, w)}$  im Gebiet  $Z^* = \{(x, y) : |x| > 1, |y| > 1\}$  eine meromorphe

Funktion  $g(x, y)$  definiert:  $g(x, y) = \frac{1}{\sum \bar{c}_{ik} (\frac{1}{x})^i (\frac{1}{y})^k}$ .

Bei Annäherung aus  $Z^*$  an einen Punkt von  $B$  bleibt  $g$  noch stetig. Auf  $B$  stimmt es mit  $f$  überein. Für eine geeignete Umgebung  $U$  von  $B$  ist  $f \neq 0$  in  $U \cap Z$  und  $g$  holomorph in  $U \cap Z^*$ .

b) Sei  $1 < r < r_0$  und  $r_0$  so klein, dass  $g(x, y)$  für  $1 < |x|, |y| < r_0$  holomorph ist. Dann wird durch

$$h(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{|x|=|y|=r} \frac{g(x, y)}{(x-z)(y-w)} dx dy$$

im Gebiet  $|z| < r, |w| < r$  eine holomorphe Funktion  $h(z, w)$  definiert.

c)  $h$  ist unabhängig von  $r$ , weil für zwei beliebige Radien  $r_1 < r_2$  aus dem Intervall  $(1, r_0)$  die Doppelintegrale übereinstimmen. Dies erkennt man durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf die 4 Teile

$\text{Im } x \leq 0, \text{Im } y \leq 0; \text{Im } x \geq 0, \text{Im } y \leq 0; \text{Im } x \geq 0, \text{Im } y \geq 0;$   
 $\text{Im } x \leq 0, \text{Im } y \geq 0$  des Ringgebietes  $r_1 \leq |x| \leq r_2, r_1 \leq |y| \leq r_2$ .

d) Daraus folgt in Verbindung mit der Stetigkeit von  $g$  bei Annäherung an  $B$

$$h(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iiint_{|x|=|y|=1} \frac{g(x, y)}{(x-z)(y-w)} dx dy = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iiint_{|x|=|y|=1} \frac{f(x, y)}{(x-z)(y-w)} dx dy$$

für  $(z, w) \in Z$ . Andererseits ist nach der Cauchyschen Integralformel das letzte Integral gleich  $f(z, w)$ , sodass  $f$  und  $h$  in  $Z$  übereinstimmen.

e) Da sich  $h$  noch in das  $Z$  umfassende Gebiet  $|z| < r_0, |w| < r_0$  fortsetzen lässt, gilt dasselbe für  $f$  und daraus folgt sofort, dass sich  $g$  in das  $Z^*$  umfassende Gebiet  $|x| > \frac{1}{r_0}, |y| > \frac{1}{r_0}$  fortsetzen lässt. Also sind  $f$  und  $g$  beide in einer gewissen Umgebung von  $B$  holomorph. Da sie auf  $B$  übereinstimmen, ist  $f \equiv g$ .

f) Die Funktion  $f$  ist also in  $|z| < r_0, |w| < r_0$  holomorph, in  $|z| > \frac{1}{r_0}, |w| > \frac{1}{r_0}$  meromorph ( $r_0 > 1$ ). Die Vereinigung  $K$  der beiden Gebiete ist ein Reinhardtscher Körper.  $f$  ist analytisch fortsetzbar in den kleinsten,  $K$  umfassenden, vollkommenen Reinhardtschen Körper. Das ist zunächst der ganze offene  $C^2$ . Da  $f$  ausserdem in allen unendlich fernen Punkten der Gestalt  $(\infty, w)$  mit  $|w| > 1$  und  $(z, \infty)$  mit  $|z| > 1$  meromorph ist, kann es sogar in den ganzen (im Sinne von Ösgood) abgeschlossenen  $C^2$  fortgesetzt werden.

g)  $f$  ist rational nach dem Satz von Hurwitz-Weierstrass.

h) Es sei 
$$f(z, w) = \frac{Q(z, w)}{P(z, w)} = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n b_{ik} z^i w^k}{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} z^i w^k}$$
 mit teilerfremden

Polynomen  $P$  und  $Q$ ;  $m$  sei das Maximum der genauen Grade von  $P$  und  $Q$  in der Veränderlichen  $z$ , entsprechend  $n$  für  $w$ . Da  $f$  in  $Z$  holomorph ist, ist zunächst  $P \neq 0$  in  $Z$ . Aus der Funktionalgleichung ergibt sich aber weiter

$$\begin{aligned} \frac{Q(z, w)}{P(z, w)} &= \frac{\sum b_{ik} z^i w^k}{\sum a_{ik} z^i w^k} = \frac{\overline{P(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})}}{\overline{Q(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})}} = \frac{\sum \bar{a}_{ik} z^{-i} w^{-k}}{\sum \bar{b}_{ik} z^{-i} w^{-k}} = \frac{\sum \bar{a}_{ik} z^{m-i} w^{n-k}}{\sum \bar{b}_{ik} z^{m-i} w^{n-k}} = \\ &= \frac{\sum \bar{a}_{m-i, n-k} z^i w^k}{\sum \bar{b}_{m-i, n-k} z^i w^k} = \frac{Q'(z, w)}{P'(z, w)}. \end{aligned}$$

Wegen der Teilerfremdheit von  $P$  und  $Q$  ergeben sich aus  $QP' = PQ'$  die Beziehungen  $P' = RP, Q' = RQ$  mit einem Polynom  $R(z, w)$ . Da aber

P oder Q in z den genauen Grad m und P' bzw. Q' höchstens den Grad m in z hat, ist R vom Grad 0 in z. Ebenso schliesst man für w. Also ist R = ε eine Konstante und es gilt  $\overline{b}_{m-i, n-k} = \epsilon a_{ik}$

für alle i, k. Aus  $P'(z, w) = z^m w^n \overline{Q(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})} = \epsilon P(z, w)$  und

$$\left| \frac{\overline{Q(\frac{1}{z}, \frac{1}{w})}}{P(z, w)} \right| = \left| \frac{Q(z, w)}{P(z, w)} \right| = 1 \quad \text{für } |z| = |w| = 1 \quad \text{folgt schliesslich noch}$$

$|\epsilon| = 1$ . Wegen  $\overline{\sqrt{\epsilon} b_{m-i, n-k}} = \sqrt{\epsilon} a_{ik}$  hat dann  $f = \frac{\sqrt{\epsilon} Q}{\sqrt{\epsilon} P}$  genau die Gestalt einer Schrankenfunktion.

### §3. Begründung für die Wahl des Dizylinders als Grundgebiet.

Ganz allgemein gesehen handelt es sich bei dem Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen um die Frage, wie sich die Beschränktheit einer holomorphen Funktion in den Koeffizienten einer diese Funktion darstellenden Potenzreihe widerspiegelt. Als Grundgebiet wird man daher ein Gebiet wählen, das als Konvergenzgebiet einer Potenzreihe in Frage kommt, d.h. einen vollkommenen logarithmisch konvexen Reinhardtschen Körper K. Ohne Einschränkung darf man dabei annehmen, dass dessen Mittelpunkt der Ursprung ist. Ferner wollen wir K als beschränkt voraussetzen, um mit dem Begriff des Šilovrandes arbeiten zu können. Hierüber gilt folgender

Satz 5.  $G$  sei ein beschränktes Gebiet im  $C^n$  mit dem Rand  $R$ ,  $\mathcal{G}$  die Menge der in  $G$  holomorphen und in  $\bar{G} = G \cup R$  stetigen Funktionen  $f(z_1, \dots, z_n)$  von  $n$  komplexen Veränderlichen. Dann gibt es unter den abgeschlossenen Teilmengen  $S$  von  $R$  mit der Eigenschaft, dass alle Funktionen aus  $\mathcal{G}$  ihr Betragsmaximum schon auf  $S$  annehmen, eine kleinste  $S_0$ .  $S_0$  heisst Šilovrand von  $G$ .

Für den Beweis dieses Satzes unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen siehe [5], S.80. Der Vollständigkeit halber sei hier ein leicht geänderter Beweis angegeben:

Sei  $\mathcal{R}$  die Menge aller abgeschlossenen Mengen  $S \subset R$  mit der Eigenschaft, dass jede Funktion  $|f|$  ( $f \in \mathcal{G}$ ) ihr Maximum auf  $S$  annimmt. (Dies ist z.B. für  $S = R$  der Fall)  $\mathcal{R}_0$  sei eine (nach dem Zornschen Lemma existierende) maximale, vermöge  $\subset$  linear geordnete Teilmenge von  $\mathcal{R}$  und  $S_0 = \bigcap \{S: S \in \mathcal{R}_0\}$ . Für jedes  $f \in \mathcal{G}$  ist die Menge  $M \subset \bar{G}$ , in der  $|f|$  sein Maximum annimmt, abgeschlossen. Man hat daher in  $\{M \cap S: S \in \mathcal{R}_0\}$  ein linear geordnetes System nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von  $R$ . Wegen der Kompaktheit von  $R$  ist der Durchschnitt  $M \cap S_0$  dieses Systems nicht leer, d.h.  $S_0$  gehört zu  $\mathcal{R}_0$ .

Sei nun weiter  $S_1$  das minimale Element einer anderen maximalen linear geordneten Menge  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ . Wir müssen zeigen, dass  $S_1 = S_0$  ist. Annahme: Es gibt einen Punkt  $P$ , der in  $S_1$ , aber nicht in  $S_0$  liegt. Dann gibt es zu  $P$  eine Umgebung  $U$  von Punkten  $Q \in R$ , die ebenfalls noch fremd zu  $S_0$  ist. Man kann  $U = \{Q \in R: |z_i(Q) - z_i(P)| < \varepsilon d \text{ für } i = 1, \dots, n\}$  nehmen. Dabei sei die Konstante  $d$  so gewählt, dass für alle Punkte

$(z_1, \dots, z_n) \in \bar{G}$   $|z_i - z_i(P)| \leq d$  ist für  $i = 1, \dots, n$ . Wegen der Minimalität von  $S_1$  gibt es ferner eine Funktion  $f_0 \in \mathcal{H}$ , welche das Maximum ihres Betrags in  $S_1 - S_1 \cap U$  nicht annimmt. Man kann  $f_0$  so normieren, dass  $\max_{\bar{G}} |f_0| = \max_{S_1} |f_0| = 1$  wird. Ausserdem darf man annehmen, dass auf  $S_1 - S_1 \cap U$   $|f_0| < \epsilon$  ist. Andernfalls ersetze man  $f_0$  durch eine genügend hohe Potenz  $f_0^n$ .

Wir betrachten jetzt die Funktionen  $z_i f_0$ ,  $i=1, \dots, n$ . Nach Konstruktion ist  $|z_i f_0 - z_i(P) f_0| < \epsilon d$  in  $S_1$  und daher in ganz  $\bar{G}$ . Andererseits gibt es in  $S_0$  einen Punkt  $Q$ , für den  $|f_0(Q)| = 1$  ist. Daraus folgt aber  $|z_i(Q) - z_i(P)| < \epsilon d$ , d.h.  $Q \in U$  im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist  $S_1 \subset S_0$  und da man genauso auch  $S_0 \subset S_1$  beweisen kann sogar  $S_1 = S_0$ .

Für die uns interessierenden Reinhardtschen Körper gilt:

Satz 6.  $K$  sei ein beschränkter vollkommener Reinhardtscher Körper mit Mittelpunkt im Ursprung. Dann enthält der Šilovrand  $S_0$  von  $K$  mit jedem Punkt  $(z_0, w_0)$  auch den ganzen Torus  $T = \{(z, w) : |z| = |z_0|, |w| = |w_0|\}$ .

Ist nämlich  $\varphi: z' = g(z, w), w' = h(z, w)$  eine holomorphe Abbildung von  $\bar{K}$  auf ein beschränktes abgeschlossenes Gebiet  $\bar{K}'$ , so entspricht jeder in  $K'$  holomorphen, in  $\bar{K}'$  stetigen Funktion  $f'$  eine holomorphe Funktion  $f$  auf  $K$ :  $f(z, w) = f'(g(z, w), h(z, w))$ . Da  $|f|$  sein Maximum innerhalb  $\bar{K}$  bereits auf  $S_0$  annimmt, gilt das Entsprechende für  $|f'|$  auf  $\varphi(S_0)$ . Da ausserdem  $f'$  beliebig und  $\varphi(S_0)$  abgeschlossen ist, ergibt sich für den Šilovrand  $S'_0$  von  $K'$  die Beziehung:  $S'_0 \subset \varphi(S_0)$ . Ist nun

speziell  $\varphi$  eine biholomorphe Abbildung von  $\bar{K}$  auf sich, so führt sie den  $\check{\text{Silovrand}}$   $S_0$  von  $K$  in sich über. Wendet man dies auf die Drehungen  $\varphi_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}: z' = e^{i\mathcal{R}_1} z, w' = e^{i\mathcal{R}_2} w$  ( $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  reell) des Reinhardtschen Körpers  $K$  an, so erhält man die Behauptung.

Weiterhin ergibt sich, dass der Dizylinder der einzige beschränkte vollkommene Reinhardtsche Körper ist, bei dem der  $\check{\text{Silovrand}}$  nur aus einem einzigen Torus besteht. Hierzu betrachten wir die in  $K$  holomorphen Funktionen  $zw^n$  ( $n=1,2,\dots$ ). Es sei  $c_n = \max_{\bar{K}} |zw^n|$ . Dann trifft die analytische Hyperfläche  $F_n: |zw^n| = c_n$  zwar  $\bar{K}$ , nicht aber  $K$ . Besteht nun der  $\check{\text{Silovrand}}$  von  $K$  nur aus dem Torus  $T = \{(z,w): |z|=a, |w|=b\}$ , so muss  $T$  in jedem  $F_n$  enthalten sein, d.h. es ist  $c_n = ab^n$ . Für einen Punkt  $(z,w)$  aus  $\bar{K}$  gilt dann  $|zw^n| \leq ab^n$  für alle  $n$ . Daraus folgt, dass in  $\bar{K}$  durchweg  $|w| \leq b$  ist, da andernfalls  $|z| \leq a \left(\frac{b}{|w|}\right)^n$  für alle  $n$ , also  $|z| = 0$  sein muss. Auch für  $z=0$  ist aber  $|w| > b$  unmöglich, da  $\bar{K}$  als Abschliessung der beschränkten offenen Menge  $K$  keine Stacheln hat. Unter Verwendung der Stützflächen  $|z^n w| = a^n b$  findet man ebenso  $|z| \leq a$  in  $\bar{K}$ . Also ist  $K$  in dem Dizylinder  $|z| < a, |w| < b$  enthalten, und da  $K$  vollkommen ist und  $\bar{K}$  die Punkte  $|z|=a, |w|=b$  enthält, fällt  $K$  mit diesem Dizylinder zusammen.

Nach diesen Vorbetrachtungen über beschränkte Reinhardtsche Körper  $K$  kommen wir nun zur Behandlung des Koeffizientenproblems der in  $K$  beschränkten Funktionen. Die Untersuchungen bei einer Veränderlichen und noch mehr die anschliessenden Untersuchungen bei zwei Veränderlichen mit dem Dizylinder als

Grundbereich zeigen, dass zur Lösung des Koeffizientenproblems gewisse Schrankenfunktionen eine fundamentale Rolle spielen. Es ist daher naheliegend, von dem zugrundegelegten Reinhardtschen Körper  $K$  zu verlangen, dass es zu  $K$  Schrankenfunktionen gibt. Dabei sei folgende Definition gegeben:

Definition.  $G$  sei ein beschränktes Gebiet im  $C^n$ . Dann heisst  $f(z_1, \dots, z_n)$  "Schrankenfunktion zu  $G$ ", wenn  $f$  in  $G$  holomorph, in  $\bar{G}$  stetig ist, und wenn auf dem Silovrand von  $G$   $|f| = 1$  gilt.

Bemerkung: Die in §2 definierten Schrankenfunktionen sind "Schrankenfunktionen zu  $Z$ " genau dann, wenn ihr Nenner in  $\bar{Z}$  nicht verschwindet. Die neue Definition ist also etwas enger gefasst.

Die Existenz von "Schrankenfunktionen zu  $K$ " allein genügt natürlich noch nicht zur Lösung des Koeffizientenproblems. Wir müssen fordern, dass sich alle in  $K$  beschränkten holomorphen Funktionen durch die Schrankenfunktionen zu  $K$  approximieren lassen (im Sinne der gleichmässigen Konvergenz auf jedem kompakten Teil von  $K$ ). Nünmehr können wir beweisen:

Satz 7.  $K$  sei ein beschränkter vollkommener Reinhardtscher Körper,  $K'$  eine kompakte Teilmenge von  $K$  und  $\epsilon$  eine positive Zahl. Zu jeder in  $K$  holomorphen und beschränkten Funktion  $f(z, w)$  gebe es eine "Schrankenfunktion zu  $K$ "  $g(z, w)$ , so dass in  $K'$   $|f - g| < \epsilon$  gilt. Dann ist  $K$  ein Dizylinder.

Beweis indirekt:

Wenn  $K$  kein Dizylinder ist, enthält sein Silovrand mindestens 2 Tori:  $|z| = a$ ,  $|w| = b$  und  $|z| = a'$ ,  $|w| = b'$ , wobei

$a, b, a', b' > 0$  und etwa  $a' < a, b' > b$ . Eine Schrankenfunktion  $g(z, w)$  zu  $K$  muss also mindestens auf diesen beiden Mengen den Betrag 1 haben. Daraus ergibt sich nach §2

$$g(z, w) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \bar{a}_{m-i, n-k} \left(\frac{z}{a}\right)^i \left(\frac{w}{b}\right)^k}{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} \left(\frac{z}{a}\right)^i \left(\frac{w}{b}\right)^k} = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \bar{a}'_{m-i, n-k} \left(\frac{z}{a'}\right)^i \left(\frac{w}{b'}\right)^k}{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a'_{ik} \left(\frac{z}{a'}\right)^i \left(\frac{w}{b'}\right)^k}.$$

Dass die Grade  $m, n$  auf beiden Seiten dieselben sind, folgt daraus, dass eine unkürzbare rationale Funktion bis auf einen gemeinsamen Faktor in Zähler und Nenner nur eine Darstellung gestattet. Es gilt daher auch

$$\frac{a_{ik}}{a'_{ik}} = \varepsilon \frac{a'_{ik}}{a'_{ik}}, \quad \frac{\bar{a}_{m-i, n-k}}{a_{ik}} = \varepsilon \frac{\bar{a}'_{m-i, n-k}}{a'_{ik}}. \text{ Ersetzt man in der}$$

zweiten Gleichung  $i$  durch  $m-i$ ,  $k$  durch  $n-k$ , so ergibt sich

$$\frac{a_{ik}}{a^{m-i, n-k}} = \varepsilon \frac{a'_{ik}}{a'^{m-i, n-k}}. \text{ Soferne also } a_{ik} \text{ (und dann auch } a'_{ik})$$

$\neq 0$  ist, gilt  $a^{m-2i, n-2k} = a'^{m-2i, n-2k}$ . Insbesondere ist  $a^{m, n} = a'^{m, n}$ , weil  $a_{00} \neq 0$ . Daraus folgt  $a^{i, k} = a'^{i, k}$  für alle  $i, k$ , wo  $a_{ik} \neq 0$  ist. Bezeichnet  $d = (m, n)$  den grössten gemeinsamen Teiler von  $m$  und  $n$  und ist  $m = dm_0, n = dn_0$ , so kann obige Gleichung offensichtlich nur gelten, wenn  $i = jm_0, k = jn_0$  ist mit einem ganzen  $j \geq 0$ . Also hat  $g(z, w)$  die Gestalt

$$g(z, w) = \frac{\sum_{j=0}^d \bar{b}_{d-j} t^j}{\sum_{j=0}^d b_j t^j} \quad \text{mit } t = z^{m_0} w^{n_0}, \quad b_j = a_{jm_0, jn_0}.$$

Wenn es also überhaupt nichtkonstante Schrankenfunktionen zu  $K$  gibt, was z.B. bei  $K = \{(z, w) : |z|^{m_0} |w|^{n_0} \leq 1, |z| \leq a, |w| \leq b, a^{m_0} b^{n_0} > 1\}$  der Fall ist, so hängen sie nur von einer einzigen Veränderlichen  $t$  ab. Dann lassen sich aber nicht alle beschränk-

ten Funktionen durch Schrankenfunktionen approximieren im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zusatz: Falls der Šilovrand von  $K$  mit dem ganzen Rand  $R$  von  $K$  zusammenfällt, ist jede Schrankenfunktion zu  $K$  eine Konstante vom Betrag 1.

Aus der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen ist bekannt, dass eine in  $K$  holomorphe, in  $\bar{K}$  stetige Funktion  $f(z, w)$  jeden Wert  $a$ , den sie in  $K$  annimmt, auch auf dem Rand  $R$  annimmt. Eine Schrankenfunktion kann daher in ganz  $K$  nur Werte vom Betrag 1 annehmen, was bei einer nichtkonstanten Funktion unmöglich ist.

Nachdem durch Satz 7 die ausgezeichnete Rolle des Dizylinders klargelegt ist, kommen wir nun zur Hauptaufgabe, nämlich zu zeigen, dass in diesem Fall die Schrankenfunktionen zu einer weitgehenden Beschreibung der Koeffizientenkörper und zur Approximation aller beschränkten Funktionen ausreichen. Der Begriff Schrankenfunktion werde von nun an wieder im Sinne von §2 verstanden.

#### §4. Die Extremaleigenschaft der Schrankenfunktionen.

Eine Extremaleigenschaft der Schrankenfunktionen kennen wir bereits, nämlich dass sie auf der Bestimmungsfläche  $B$  des Dizylinders den Betrag 1 besitzen. Hier soll nun eine im Hinblick auf das Koeffizientenproblem noch viel wichtigere Extremaleigenschaft bewiesen werden.

Satz 8. Die  $(m,n)$ -Schranksfunktion  $f = \frac{P^*}{P}$  besitze in  $Z$  die

Potenzreihenentwicklung  $f = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$ . Weiter sei  $g$  eine in  $Z$  holomorphe Funktion mit der Entwicklung

$g(z,w) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n c_{ik} z^i w^k + \sum' \gamma_{ik} z^i w^k$  (d.h. "g stimmt mit f bis zur Potenz  $z^m w^n$  überein"). Wenn dann  $g$  zu  $F$  gehört, so ist  $g = f$ .  $\sum'$  bedeutet Summation über alle Paare  $(i,k)$  mit  $i > m$  oder  $k > n$ .

Beweis: Wir bilden die in  $Z$  holomorphe Funktion  $g \cdot P = P^* + \sum' \alpha_{ik} z^i w^k = P^* + R$ . Integriert man nun  $|gP|^2 = |P^* + R|^2$  über die Fläche  $|z|=|w|=r$  ( $r < 1$ ), so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \iint |g|^2 \left| \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} r^{\mu+\nu} e^{i(\mu\varphi_1 + \nu\varphi_2)} \right|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 = \\ & \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \left| \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \bar{a}_{m-\mu, n-\nu} r^{\mu+\nu} e^{i(\mu\varphi_1 + \nu\varphi_2)} + \sum' \alpha_{\mu\nu} r^{\mu+\nu} e^{i(\mu\varphi_1 + \nu\varphi_2)} \right|^2 d\varphi_1 d\varphi_2 \\ & = \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n |\bar{a}_{m-\mu, n-\nu}|^2 r^{2(\mu+\nu)} + \sum' |\alpha_{\mu\nu}|^2 r^{2(\mu+\nu)}. \end{aligned}$$

Falls nun  $|g| \leq 1$  in  $Z$ , gewinnt man daraus die Abschätzung

$$\sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n |\bar{a}_{m-\mu, n-\nu}|^2 r^{2(\mu+\nu)} + \sum' |\alpha_{\mu\nu}|^2 r^{2(\mu+\nu)} \leq \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n |a_{\mu\nu}|^2 r^{2(\mu+\nu)}.$$

Im Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  stimmen die rechte Seite und der erste Term links überein, also müssen alle  $\alpha_{\mu\nu} = 0$  sein. Das heisst aber  $gP = P^*$ ,  $g = f$ .

Die Bedeutung dieses Satzes erkennt man am besten, wenn man die Funktionen aus  $F$  durch ihre Repräsentanten geometrisch veranschaulicht. Es gilt dann

Satz 9. Der  $(m,n)$ -te Repräsentant  $c_{mn}$  einer  $(m,n)$ -Schranksfunktion  $f(z,w)$  ist Extrempunkt des konvexen Körpers  $K_{mn}$ .

Beweis:

a)  $K_{mn}$  ist ein konvexer Körper in  $C^{(m+1)(n+1)}$ .

Wir haben zu zeigen, dass  $K_{mn}$  abgeschlossen ist, mit je zwei Punkten auch den Mittelpunkt enthält und innere Punkte besitzt.

Sei  $\tau_{mn}^{(k)}$  eine gegen  $\tau_{mn}^*$  konvergente Folge von Punkten aus  $K_{mn}$ .

Nach Definition von  $K_{mn}$  (siehe Einleitung) gibt es dann eine Folge von Funktionen  $f_k(z, w)$  aus  $F$ , so dass  $\tau_{mn}^{(k)}$  Repräsentant von  $f_k$  ist. Da  $F$  eine normale Familie ist, lässt sich aus den  $f_k$  eine konvergente Teilfolge bilden, deren Limes  $f^*$  ebenfalls zu  $F$  gehört.  $\tau_{mn}^*$  ist der  $(m, n)$ -te Repräsentant von  $f^*$ , womit die Abgeschlossenheit von  $K_{mn}$  bewiesen ist. Da mit  $|f_1| \leq 1$  und

$|f_2| \leq 1$  auch  $\left| \frac{f_1 + f_2}{2} \right| \leq 1$  gilt, enthält  $K_{mn}$  mit je zwei Punkten

auch deren Mittelpunkt. Schliesslich enthält  $K_{mn}$  die Kugel

$$\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n |c_{ik}|^2 \leq \frac{1}{(m+1)^2(n+1)^2}, \text{ weil für diese } c_{ik} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n c_{ik} z^i w^k$$

in  $F$  ist.

b)  $\tau_{mn}$  ist Extrempunkt von  $K_{mn}$ .

Wir haben zu zeigen, dass  $\tau_{mn}$  nicht Punkt einer ganz zu  $K_{mn}$  gehörenden offenen Strecke ist. Annahme: Es gibt zwei verschiedene Punkte  $\tau_{mn}^{(1)}, \tau_{mn}^{(2)} \in K_{mn}$ , so dass  $\tau_{mn} = \lambda \tau_{mn}^{(1)} + (1-\lambda) \tau_{mn}^{(2)}$

mit  $0 < \lambda < 1$ .  $f_1, f_2$  seien Funktionen aus  $F$  mit den Repräsentanten  $\tau_{mn}^{(1)}, \tau_{mn}^{(2)}$ . Dann besitzt  $f' = \lambda f_1 + (1-\lambda)f_2$  den Repräsentanten  $\tau_{mn}$ . Nach Satz 8 und der Voraussetzung ist daher  $f' = f$ ,

und es gilt für beliebiges Argument  $(z, w) \in Z$ :

$$|f|^2 = |\lambda f_1 + (1-\lambda)f_2|^2 = \lambda^2 |f_1|^2 + (1-\lambda)^2 |f_2|^2 + \lambda(1-\lambda)(|f_1|^2 + |f_2|^2)$$

$$-\lambda(1-\lambda)|f_1-f_2|^2 \leq \lambda^2+(1-\lambda)^2+2\lambda(1-\lambda)-\lambda(1-\lambda)|f_1-f_2|^2.$$

Integration über  $B_r$ :  $z=re^{i\varphi}$ ,  $w=re^{i\psi}$  und Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  ergibt

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B_r} |f(z,w)|^2 d\varphi d\psi \leq 1 - \lambda(1-\lambda) \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B_r} |f_1-f_2|^2 d\varphi d\psi \\ = 1 - \lambda(1-\lambda) \cdot \sum_{i,k=0}^{\infty} |c_{ik}^{(1)} - c_{ik}^{(2)}|^2 \leq 1 - \lambda(1-\lambda) |\tau_{mn}^{(1)} - \tau_{mn}^{(2)}|^2 < 1.$$

Diese Ungleichung steht aber im Widerspruch dazu, dass  $f$  Schrankenfunktion ist.

Falls nämlich  $f$  eine Schrankenfunktion ist, deren Nenner  $P$  in  $\overline{Z}$  nicht verschwindet, ist  $f$  in  $\overline{Z}$  gleichmässig stetig und  $|f|=1$  auf  $B$ , also  $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B_r} |f(z,w)|^2 d\varphi d\psi = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_B |f(z,w)|^2 d\varphi d\psi = 1$ . Hat aber  $P$  am Rande von  $Z$  Nullstellen, so ist der Durchschnitt  $D$  von  $B$  mit dem Nullstellengebilde von  $P$  höchstens eindimensional (weil  $B$  keine analytische Fläche ist). Man kann dann auf  $B$  einen kompakten zu  $D$  fremden Teil  $B'$  wählen, dessen Flächeninhalt sich von dem von  $B$  beliebig wenig unterscheidet. Verbindet man die Punkte von  $B'$  mit dem Ursprung, so erhält man auch auf  $B_r$  einen Teil  $B'_r$  und es gilt

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B_r} |f|^2 d\varphi d\psi \geq \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B'_r} |f|^2 d\varphi d\psi = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B'} |f|^2 d\varphi d\psi \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B'} d\varphi d\psi = 1 - \varepsilon, \text{ wobei } \varepsilon \text{ beliebig klein gemacht werden kann. Also gilt für jede Schrankenfunktion } f:$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{B_r} |f|^2 d\varphi d\psi = 1.$$

Aus Satz 9 folgt insbesondere, dass der Repräsentant  $\tau_{mn}$  jeder  $(m,n)$ -Schrankenfunktion Randpunkt von  $K_{mn}$  ist.

# §5. Eine Abschätzung für $K_{mn}$ .

Wir versuchen nun, eine Beschreibung von  $K_{mn}$  durch Determinanten zu erhalten. Dazu sei ein Polynom  $\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n c_{ik} z^i w^k$  gegeben. Gesucht ist ein Vielfaches  $\lambda \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \bar{a}_{m-i, n-k} z^i w^k}{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik} z^i w^k}$

( $\lambda$  reell) einer  $(m, n)$ -Schrankenfunktion, dessen Potenzreihenentwicklung im Ursprung mit dem gegebenen Polynom beginnt.

Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\lambda \bar{a}_{m-i, n-k} = \sum_{\mu=0}^i \sum_{\nu=0}^k c_{\mu\nu} a_{i-\mu, k-\nu} \quad (i=0, \dots, m; k=0, \dots, n).$$

Durch Hinzunahme der konjugierten Gleichungen

$\lambda a_{m-i, n-k} = \sum_{\mu=0}^i \sum_{\nu=0}^k \bar{c}_{\mu\nu} \bar{a}_{i-\mu, k-\nu}$  kommt man auf ein lineares homogenes Gleichungssystem für die Unbekannten

$\bar{a}_{00}, \dots, \bar{a}_{0n}; \dots; \bar{a}_{m0}, \dots, \bar{a}_{mn}; a_{mn}, \dots, a_{m0}; \dots; a_{0n}, \dots, a_{00}$

mit der Matrix  $\begin{pmatrix} -\lambda E & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & -\lambda E \end{pmatrix}$ , wobei  $E$  die  $(m+1)(n+1)$ -dimensionale

Einheitsmatrix,  $\Gamma_{mn}$  die Matrix  $\begin{pmatrix} c_{00} & \dots & c_{0m} \\ & \ddots & \\ & & c_{0n} \end{pmatrix}$  mit  $c_i =$

$\begin{pmatrix} c_{i0} & c_{i1} & \dots & c_{in} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_{i0} \end{pmatrix}$  ( $i=1, \dots, m$ ) und  $\Gamma_{mn}^+$  die hermitisch konjugierte

Matrix zu  $\Gamma_{mn}$  ist.

Notwendig für eine nichttriviale Lösung ist jedenfalls, dass  $\lambda$  Eigenwert der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & 0 \end{pmatrix}$  ist. Die Eigenwerte sind alle reell (weil die Matrix hermitisch ist), und mit  $\lambda$  ist stets auch  $-\lambda$  ein Eigenwert. Dies ergibt sich, wenn man die erste Hälfte der Zeilen und die zweite Hälfte der Spalten

mit  $-1$  multipliziert. Ist umgekehrt  $\lambda$  ein Eigenwert, so gibt es eine nichttriviale Lösung der Form  $(\bar{y}_{00}, \dots, \bar{y}_{mn}; x_{mn}, \dots, x_{00})$ .

Wegen der speziellen Gestalt des Gleichungssystems ist dann auch  $(\bar{x}_{00}, \dots, \bar{x}_{mn}; y_{mn}, \dots, y_{00})$  eine Lösung. Durch Addition erhält man  $(\bar{x}_{00} + \bar{y}_{00}, \dots, \bar{x}_{mn} + \bar{y}_{mn}; x_{mn} + y_{mn}, \dots, x_{00} + y_{00})$ , also eine Lösung der gewünschten Form. Falls diese trivial ist, also  $y_{ik} = -x_{ik}$ , ist  $i(\bar{y}_{00}, \dots, \bar{y}_{mn}; x_{mn}, \dots, x_{00}) = ((ix_{00}), \dots, (ix_{mn}); ix_{mn}, \dots, ix_{00})$  eine nichttriviale Lösung der gewünschten Form.

Sei nun  $g(z, w)$  eine in  $Z$  holomorphe Funktion mit der Potenzreihenentwicklung  $\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n c_{ik} z^i w^k + \dots$  und  $f_\lambda(z, w) = \lambda \frac{P_\lambda^*(z, w)}{P_\lambda(z, w)}$  mit  $P_\lambda(z, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik}^{(\lambda)} z^i w^k$  eine zum Eigenwert  $\lambda \geq 0$  gehörige Lösungsfunktion. Dann ergibt Integration von  $|gP_\lambda|^2 = |\lambda P_\lambda^* + \text{Rest}|^2$  über  $|z| = |w| = r$  und Grenzübergang  $r \rightarrow 1$  wie auf Seite 25 die Ungleichung  $\lambda^2 \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{ik}^{(\lambda)}|^2 + \sum_{i=0}^m |a_{ik}^{(\lambda)}|^2 \leq \sup_{(z, w) \in Z} |g(z, w)|^2 \cdot \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{ik}^{(\lambda)}|^2$ . Da  $\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n |a_{ik}^{(\lambda)}|^2 \neq 0$  ist, folgt hieraus  $\sup |g(z, w)| \geq \lambda$ . Diese Ungleichung gilt insbesondere für den grössten Eigenwert  $\lambda^*$ . Falls nun  $f_\lambda$  in  $Z$  holomorph ist, kann man in der Ungleichung  $\sup |g(z, w)| \geq \lambda^*$   $g = f_\lambda$  setzen und erhält:  $\sup_{(z, w) \in Z} |f(z, w)| = \lambda \geq \lambda^*$ . Damit ist bewiesen:

Satz 10. Von den rationalen Funktionen

$f_\lambda(z, w) = \lambda \frac{P_\lambda^*(z, w)}{P_\lambda(z, w)} = \lambda \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{m-i, n-k}^{(\lambda)} z^i w^k}{\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n a_{ik}^{(\lambda)} z^i w^k}$ ,  $\lambda \geq 0$ , deren Potenzreihenentwicklung mit dem Polynom  $\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n c_{ik} z^i w^k$  beginnt, ist höchstens die zum grössten Eigenwert  $\lambda = \lambda^*$  der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & 0 \end{pmatrix}$  gehörige in  $Z$  holomorph.

Es ist natürlich möglich, dass zu einem Eigenwert  $\lambda$  mehrere verschiedene Lösungsfunktionen  $f_\lambda$  gehören. Nur in dem Spezialfall, wo eine zum grössten Eigenwert  $\lambda^*$  gehörige Funktion  $f_{\lambda^*}$  in  $Z$  holomorph ist, besteht unter allen Umständen Eindeutigkeit. Aus Satz 8 folgt nämlich sofort, dass dann  $f_{\lambda^*}$  die einzige in  $Z$  holomorphe Funktion mit einem Betrag  $\leq \lambda^*$  ist. Die negativen Eigenwerte blieben unberücksichtigt, weil vermöge  $f_\lambda = \lambda \frac{P_\lambda^*}{P_\lambda} = -\lambda \frac{(iP_\lambda)^*}{iP_\lambda}$  zu ihnen dieselben Lösungsfunktionen gehören.

Sei nun  $\epsilon_{mn} \in K_{mn}$  und  $g(z, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n c_{ik} z^i w^k + \dots$  eine Funktion aus  $F$  mit dem Repräsentanten  $\epsilon_{mn}$ . Dann folgt aus der Ungleichung  $1 \geq \sup_{(z, w) \in Z} |g(z, w)| \geq \lambda^*$

Satz 11.  $K_{mn}$  ist enthalten in der durch die Ungleichung

$D_{mn}(\lambda; \epsilon_{mn}) > 0$  für  $\lambda > 1$  beschriebenen Punktmenge  $L_{mn}$ . Dabei ist die Determinante  $D_{mn}(\lambda; \epsilon_{mn})$  definiert durch

$$D_{mn}(\lambda; \epsilon_{mn}) = \begin{vmatrix} -\lambda E & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & -\lambda E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & \lambda E \end{vmatrix}.$$

Beweis:  $\lambda^* \leq 1$  ist gleichbedeutend damit, dass  $D_{mn}(\lambda; \epsilon_{mn})$  für kein  $\lambda > 1$  verschwindet. Da aber  $D_{mn}$  für sehr grosse  $\lambda$  positiv ist, gilt dies für alle  $\lambda > 1$ .

Bei einer Veränderlichen kann man an dieser Stelle beweisen, dass die zum grössten Eigenwert der Determinante  $D_n(\lambda; c_0, \dots, c_n)$  (siehe Einleitung) gehörige rationale Funktion im Einheitskreis holomorph ist, und daher die Ungleichung  $D_n(\lambda; c_0, \dots, c_n) > 0$  für  $\lambda > 1$  auch hinreichend dafür ist, dass

$(c_0, \dots, c_n)$  zum Repräsentantenkörper  $K_n$  gehört. Bei zwei Veränderlichen reichen dagegen die Ungleichungen von Satz 11 nicht aus, um  $K_{mn}$  zu bestimmen. Dies wird sich in 6 am Beispiel  $(m,n) = (1,1)$  ergeben.

Zunächst wollen wir aber noch einige Eigenschaften der Menge  $L_{mn}$  kennenlernen. Die Bedingung, dass alle Eigenwerte

der Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & 0 \end{pmatrix} \geq -1$  sind, ist gleichbedeutend damit,

dass alle Eigenwerte der Matrix  $\begin{pmatrix} E & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & E \end{pmatrix} \geq 0$  sind, d.h. dass

die zu dieser Matrix gehörige hermitesche Form nichtnegativ definit (= positiv semidefinit) ist. Daraus ergibt sich sofort,

dass  $L_{mn}$  konvex ist. Sind nämlich  $\mathcal{C}_{mn}^{(1)}$  und  $\mathcal{C}_{mn}^{(2)}$  aus  $L_{mn}$ , also die

zu  $\begin{pmatrix} E & \Gamma_{mn}^{(1)} \\ \Gamma_{mn}^{(1)+} & E \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} E & \Gamma_{mn}^{(2)} \\ \Gamma_{mn}^{(2)+} & E \end{pmatrix}$  gehörigen hermiteschen Formen

nichtnegativ definit, so ist auch die zu

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & \Gamma_{mn}^{(1)} \\ \Gamma_{mn}^{(1)+} & E \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & \Gamma_{mn}^{(2)} \\ \Gamma_{mn}^{(2)+} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & \frac{1}{2}(\Gamma_{mn}^{(1)} + \Gamma_{mn}^{(2)}) \\ \frac{1}{2}(\Gamma_{mn}^{(1)+} + \Gamma_{mn}^{(2)+}) & E \end{pmatrix}$$

gehörige Form nichtnegativ definit, d.h.  $\frac{1}{2}(\mathcal{C}_{mn}^{(1)} + \mathcal{C}_{mn}^{(2)}) \in L_{mn}$ .

Da ferner  $L_{mn}$  abgeschlossen ist, was unmittelbar aus der Definition folgt, ist  $L_{mn}$  ein konvexer Körper.

Von besonderem Interesse ist noch, dass genau diejenigen Randpunkte von  $K_{mn}$  auch Randpunkte von  $L_{mn}$  sind, die Repräsentanten von  $(m,n)$ -Schrankenfunktionen sind. Einerseits ist

nämlich für den Repräsentanten  $\zeta_{mn}$  einer  $(m,n)$ -Schränkenfunktion  $D_{mn}(1; \zeta_{mn}) = 0$ , also  $\zeta_{mn}$  Randpunkt von  $L_{mn}$ , andererseits kann ein Randpunkt  $\zeta_{mn}$  von  $L_{mn}$  höchstens dann zu  $K_{mn}$  gehören, wenn die zum Eigenwert  $\lambda^* = 1$  gehörige Funktion  $f_{\lambda^*}(z,w)$  in  $Z$  holomorph ist, da für jede andere in  $Z$  holomorphe Funktion  $g(z,w)$  mit dem Repräsentanten  $\zeta_{mn}$   $\sup_{(z,w) \in Z} |g(z,w)| > 1$  ist (siehe Seite 29).

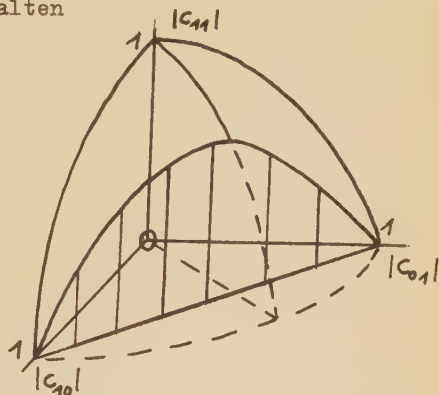
## §6. Genauere Untersuchung der Beispiele $(m,n)=(1,1)$ und $(m,n)=(2,1)$ .

### 1. Bestimmung von $K_{11}$ .

Wir beschränken uns auf den Spezialfall  $c_{00} = 0$ , der durch eine lineargebrochene Transformation  $f \rightarrow \hat{f} = \frac{f - c_{00}}{1 - \bar{c}_{00}f}$  stets erreicht werden kann, falls  $|c_{00}| < 1$  ist. Den Schnitt von  $K_{11}$  mit der Ebene  $c_{00} = 0$  bezeichne ich mit  $\hat{K}_{11}$ . Eine kleine Rechnung ergibt  $D_{11}(\lambda; 0, c_{10}, c_{01}, c_{11}) = \lambda^2 [(\lambda^2 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2) - \lambda^2 |c_{11}|^2]$   $D_{11} > 0$  für  $\lambda > 1$  ist in diesem Fall gleichwertig mit  $|c_{11}| \leq 1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2$ . In einem Koordinatensystem mit den Achsen  $|c_{10}|, |c_{01}|, |c_{11}|$  ist die hierdurch beschriebene Punktmenge  $\hat{L}_{11}$  begrenzt von den drei Koordinatenebenen und einem Stück des Paraboloids  $|c_{11}| = 1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2$ . Für  $\hat{K}_{11}$  kann man jedoch sofort noch eine andere Abschätzung gewinnen. Wenn nämlich  $f(z,w) = c_{10}z + c_{01}w + c_{11}zw + \dots$  aus  $F$  ist, gilt auch für die

Funktion einer Veränderlichen  $f_t(z) = f(z, tz) = (c_{10} + tc_{01})z + z^2(\dots)$  für jedes feste  $t$  vom Betrag 1 die Ungleichung  $|f_t(z)| \leq 1$  für  $|z| < 1$ . Daraus folgt unmittelbar  $|c_{10} + tc_{01}| \leq 1$  für alle diese  $t$ , also  $|c_{10}| + |c_{01}| \leq 1$ . Durch die Ebene  $|c_{10}| + |c_{01}| = 1$  wird nun tatsächlich noch ein Stück des Paraboloids abgeschnitten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{K}_{11}: \quad & |c_{10}| + |c_{01}| \leq 1 \\ & |c_{11}| + |c_{10}|^2 + |c_{01}|^2 \leq 1 \end{aligned}$$



Dass die beiden Ungleichungen zusammen zur Beschreibung von  $\overset{\circ}{K}_{11}$  ausreichend sind, sieht man daraus, dass dann

$$f(z, w) = \frac{c_{10}z + c_{01}w + \frac{c_{11}}{1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2}zw}{1 + \frac{c_{11}}{1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2}(\bar{c}_{01}z + \bar{c}_{10}w)}$$

eine zu  $F$  gehörige Funktion mit dem Repräsentanten

$(0, c_{10}, c_{01}, c_{11}) \in \overset{\circ}{K}_{11}$  ist. Falls  $|c_{11}| = 1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2$ ,

ist  $f$  eine Schrankenfunktion, wie man aus

$$f(z, w) = \frac{\bar{\sigma}c_{10}z + \bar{\sigma}c_{01}w + \bar{\sigma}zw}{\bar{\sigma} + \bar{\sigma}\bar{c}_{01}z + \bar{\sigma}\bar{c}_{10}w}, \quad \sigma^2 = \frac{c_{11}}{1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2}$$

erkennt. Ausserdem sieht man, dass die Zusatzbedingung  $|c_{10}| + |c_{01}| \leq 1$  gerade für das Nichtverschwinden des Nenners in  $Z$  sorgt.

Falls aber  $|c_{11}| < 1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2$  ist, kann man nach den Überlegungen am Schluss von §5 den Punkt  $(0, c_{10}, c_{01}, c_{11}) \in \dot{K}_{11}$  sicher nicht als Repräsentanten einer  $(1,1)$ -Schränkenfunktion erhalten. Insbesondere trifft das für diejenigen Randpunkte von  $\dot{K}_{11}$  zu, für welche  $|c_{10}| + |c_{01}| = 1$ ,  $|c_{11}| < 1 - |c_{10}|^2 - |c_{01}|^2$  ist. Abweichend von den Verhältnissen bei einer Veränderlichen gilt also

Satz 12. Die  $(1,1)$ -ten Repräsentanten der  $(1,1)$ -Schränkenfunktionen erfüllen nicht die ganze Oberfläche von  $K_{11}$ .

Es gilt jedoch die schwächere Aussage, dass  $K_{11}$  die konvexe Hülle der von den Repräsentanten der  $(1,1)$ -Schränkenfunktionen gebildeten Punktmenge ist. Dass auch dies nicht allgemein richtig ist, wollen wir jetzt am Beispiel  $(m,n) = (2,1)$  nachweisen.

2. Dazu untersuchen wir zunächst, wann ein Polynom  $a_0 + a_1 z + a_2 z^2$  für  $|z| \leq 1$  einen Betrag  $\leq 1$  besitzt. Obwohl durch die Schurschen Determinantenbedingungen diese Frage im Prinzip gelöst ist, bleibt es nämlich noch offen, ein System von endlich vielen notwendigen und hinreichenden Bedingungen an  $a_0, a_1, a_2$  zu finden. In voller Allgemeinheit dürfte dieses sehr kompliziert sein, es genügt jedoch, den Spezialfall  $a_0 + a_1 + a_2 = 1$  zu behandeln. Wenn nämlich  $|a_0 + a_1 z + a_2 z^2| < 1$  ist für alle  $z$

( $|z| \leq 1$ ), dann kann man  $a_0, a_1, a_2$  mit einem Faktor  $r > 1$  multiplizieren, so dass  $|ra_0 + ra_1z + ra_2z^2|$  den Wert 1 etwa für  $z = e^{i\varphi}$  erreicht, aber (in  $|z| \leq 1$ ) nirgends überschreitet. Ist dagegen  $a_0 + a_1e^{i\varphi} + a_2e^{2i\varphi} = e^{i\psi}$ , so erhält man durch "Drehungen"  $a_0 \rightarrow a_0e^{i\psi}$ ,  $a_1 \rightarrow a_1e^{i(\psi-\varphi)}$ ,  $a_2 \rightarrow a_2e^{i(\psi-2\varphi)}$  ein Koeffizientensystem der gewünschten Form.

Behauptung: Falls  $a_0 + a_1 + a_2 = 1$  ist, gilt  $|a_0 + a_1z + a_2z^2| \leq 1$  für  $|z| \leq 1$  genau dann, wenn 1.  $a_2 - a_0 = s$  reell, 2.  $s^2 \leq 1$ , 3.  $|a_1|^2 \leq (1-s^2)\operatorname{Re} a_1$  ist.

Beweis:

a) Notwendigkeit der drei Bedingungen.

Sei  $z = e^{i\varphi}$ ,  $a'_k = \operatorname{Re} a_k$ ,  $a''_k = \operatorname{Im} a_k$  ( $k=1,2,3$ ). Dann gilt  $|a_0(1-z) + z + a_2z(z-1)| = |a_0(\bar{z}-1) + 1 + a_2(z-1)| = |a_0(-i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \dots) + 1 + a_2(i\varphi - \frac{\varphi^2}{2} - \dots)| \leq 1$  für reelles  $\varphi$ , woraus sich durch Betrachtung kleiner  $\varphi$  ergibt, dass  $a_2 - a_0 = s$  reell ist (Bedingung 1).

Mit  $a_0 + a_2 = a$  erhält man weiter die folgenden zueinander gleichwertigen Ungleichungen:

$$|a_0(\bar{z}-1) + 1 + a_2(z-1)| = |a'(\cos\varphi - 1) + 1 + i\{a''(\cos\varphi - 1) + s \cdot \sin\varphi\}| \leq 1$$

für alle  $\varphi$ ,

$$(1 - \cos\varphi)\{a'^2(1 - \cos\varphi) - 2a' + a''^2(1 - \cos\varphi) - 2a''s \cdot \sin\varphi + s^2(1 + \cos\varphi)\} \leq 0$$

für alle  $\varphi$ ,

$$|a|^2 - 2a' + s^2 + (s^2 - |a|^2)\cos\varphi - 2a''s \cdot \sin\varphi \leq 0 \text{ für alle } \varphi,$$

$$|a|^2 - 2a' + s^2 + \sqrt{(s^2 - |a|^2)^2 + (2a''s)^2} \leq 0,$$

$$|1 - a_1|^2 - 2(1 - a'_1) + s^2 + \sqrt{(s^2 - 1 + 2a'_1 - |a_1|^2)^2 + (2a''_1s)^2} \leq 0,$$

$$(1) \quad -1 + |a_1|^2 + s^2 + \sqrt{(s^2 - 1 + 2a'_1 - |a_1|^2)^2 + (2a''_1s)^2} \leq 0.$$

Quadrieren ergibt nun

$$(2) \quad (1-s^2)^2 + 4a_1'^2 + |a_1|^4 + 4a_1'(s^2-1) - 2|a_1|^2(s^2-1) - 4a_1'|a_1|^2 +$$

$$4a_1''^2 s^2 \leq (1-s^2)^2 - 2(1-s^2)|a_1|^2 + |a_1|^4,$$

$$4a_1'^2 + 4a_1's^2 - 4a_1' - 2(a_1'^2 + a_1''^2)s^2 + 2(a_1'^2 + a_1''^2) - 4a_1'|a_1|^2 + 4a_1''^2 s^2 +$$

$$+ 2(a_1'^2 + a_1''^2) - 2s^2(a_1'^2 + a_1''^2) \leq 0,$$

$$(3) \quad 4|a_1|^2(1-a_1') + 4s^2 a_1'(1-a_1') - 4a_1'(1-a_1') \leq 0.$$

Da trivialerweise  $|a_1| \leq 1$ ,  $a_1' \leq 1$  ist, folgt entweder  $a_1 = a_1' = 1$ ,

$a_0 = a_2 = 0$  oder  $a_1' < 1$  und  $|a_1|^2 \leq a_1'(1-s^2)$ . In beiden Fällen

gilt also Bedingung 3:  $|a_1|^2 \leq a_1'(1-s^2)$ .

Aus (1) ergibt sich noch zusätzlich  $|a_1|^2 + s^2 \leq 1$ , also erst recht  $s^2 \leq 1$ , d.h. Bedingung 2.

b) Hinreichen der drei Bedingungen.

Wir müssen zeigen, dass (1) erfüllt ist. Aus den Bedingungen

2. und 3. folgt zunächst  $a_1' \geq 0$ ,  $|a_1|^2 \leq a_1' \leq |a_1|$ , also

$|a_1| \leq 1$  und  $0 \leq a_1' \leq 1$ . In Verbindung mit Bedingung 3 gewinnt

man daraus die Ungleichung (3) und durch Zurückrechnen auch (2).

Um (1) zu gewinnen, muss man nur noch die Wurzel ziehen und

das ergibt auf der rechten Seite  $1-s^2-|a_1|^2$ , weil nach Be-

dingung 3  $1-s^2-|a_1|^2 \geq (1-s^2)(1-a_1') \geq 0$  ist.

Für das Folgende interessiert uns der Maximalwert von

$|a_0| + |a_1|$  unter der Bedingung  $|a_0 + a_1 z + a_2 z^2| \leq 1$  für  $|z| \leq 1$ .

Offensichtlich darf man zur Bestimmung dieses Wertes

$a_0 + a_1 + a_2 = 1$  annehmen. Dann gilt:

$$|a_0| + |a_1| = \left| \frac{1 - a_1 - s}{2} \right| + |a_1| \leq \frac{1}{2} \sqrt{(1-s-a_1')^2 + a_1''^2} + \sqrt{a_1'(1-s^2)} \leq \\ \frac{1}{2} \sqrt{(1-s)^2 - 2a_1'(1-s) + a_1'(1-s^2)} + \sqrt{a_1'(1-s^2)} = \frac{1}{2}(1-s) \sqrt{1-a_1'} + \sqrt{a_1'(1-s^2)}.$$

Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum für

$$-\frac{1-s}{4\sqrt{1-a_1'}} + \frac{\sqrt{1-s^2}}{2\sqrt{a_1'}} = 0, \quad \frac{1-s}{4(1-a_1')} = \frac{1+s}{a_1'}, \quad (1-s)a_1' = 4(1+s) - 4(1+s)a_1',$$

$$a_1'(5+3s) = 4(1+s), \quad a_1' = \frac{4(1+s)}{5+3s}. \quad \text{Also ist } |a_0| + |a_1| \leq$$

$$\frac{1}{2}(1-s) \sqrt{\frac{(1-s)4(1+s)}{4(1+s)(5+3s)}} + \sqrt{\frac{4(1+s)^2(1-s)}{5+3s}} = \frac{1}{2}(1-s+4+4s) \sqrt{\frac{1-s}{5+3s}} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(1-s)(5+3s)}. \quad \text{Das Maximum ergibt sich für } -5-3s+3-3s=0,$$

$$s = -\frac{1}{3} \text{ und hat den Wert } \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Gleichzeitig ergibt sich, dass dieser Maximalwert von

$|a_0| + |a_1|$  im Falle  $a_0 + a_1 + a_2 = 1$  nur angenommen wird, wenn

$$s = -\frac{1}{3}, \quad a_1' = \frac{2}{3}, \quad |a_1|^2 = \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{16}{27}, \quad a_1'' = \pm \sqrt{\frac{16}{27} - \frac{4}{9}} = \pm \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$\text{also } a_1 = \frac{2}{3}(1 \pm \frac{i}{\sqrt{3}}) \text{ ist, ferner } a_0 = \frac{1}{2}(1-s-a_1) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} \mp \frac{2i}{3\sqrt{3}}) =$$

$$\frac{1}{3}(1 \mp \frac{i}{\sqrt{3}}) \text{ und } a_2 = \frac{1}{2}(1+s-a_1) = \mp \frac{i}{3\sqrt{3}}. \text{ Durch eine Drehung}$$

$$a_0 \rightarrow a_0 e^{i\psi}, \quad a_1 \rightarrow a_1 e^{i(\psi-\varphi)}, \quad a_2 \rightarrow a_2 e^{i(\psi-2\varphi)} \text{ mit } \psi = \pm \frac{\pi}{6}, \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\text{erhält man daraus eindeutig } a_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad a_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}}, \quad a_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Ergebnis:

$$\text{Aus } |a_0 + a_1 z + a_2 z^2| \leq 1 \text{ für } |z| \leq 1 \text{ folgt } |a_0| + |a_1| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. |a_0| + |a_1|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ gilt nur, wenn } |a_0| = \frac{2}{3\sqrt{3}}, |a_1| = \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ ist. Falls dabei}$$

$$a_0 = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad a_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}} \text{ ist, muss gleichzeitig } a_2 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \text{ sein. Die}$$

$$\text{Funktion } \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} z - \frac{1}{3\sqrt{3}} z^2 \text{ nimmt für } z = e^{\pm \frac{4\pi}{3}} \text{ den Wert } e^{\pm \frac{i\pi}{6}} \text{ an.}$$

Daraus kann man weiter schliessen, dass eine Linearkombination  $\sum_{x=1}^k \lambda_x (a_0^{(x)} + a_1^{(x)} z + a_2^{(x)} z^2) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$  ( $\lambda_x > 0$ ,  $\sum_{x=1}^k \lambda_x \leq 1$ ) von beschränkten Polynomen  $a_0^{(x)} + a_1^{(x)} z + a_2^{(x)} z^2$  nur dann  $|a_0| + |a_1| = \frac{2}{\sqrt{3}}$  erfüllt, wenn bereits  $a_1^{(x)} = a_1$  ist ( $x=1, \dots, k$ ;  $i=1, 2, 3$ ).

3. Wir können nun zeigen, dass der Punkt  $c_{21}$  mit den Koordinaten

$$c_{00} = c_{10} = c_{01} = 0, c_{20} = \frac{2}{3\sqrt{3}}, c_{11} = \frac{4}{3\sqrt{3}}, c_{21} = 0$$

sich nicht als Repräsentant einer Linearkombination von (2,1)-Schränkenfunktionen gewinnen lässt.  $c_{21}$  gehört zu  $K_{21}$ , weil

$\frac{2}{3\sqrt{3}} z^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}} zw - \frac{1}{3\sqrt{3}} w^2$  eine zu F gehörige Funktion mit dem Repräsentanten  $c_{21}$  ist. Dies ergibt sich sofort daraus, dass das Maximum des Betrages auf B, also für  $w=tz$ ,  $|z|=|t|=1$  angenommen wird und dort  $|z|^2 \left| \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} t - \frac{1}{3\sqrt{3}} t^2 \right| \leq 1$  ist.

Träte nun  $c_{21}$  als Repräsentant einer Linearkombination  $\sum_{x=1}^k \lambda_x f_x(z, w)$  ( $\lambda_x > 0$ ,  $\sum \lambda_x \leq 1$ ) von (2,1)-Schränkenfunktionen  $f_x$  auf, so müsste nach der letzten Bemerkung unter 2. der homogene Bestandteil 2. Grades jedes einzelnen  $f_x$  schon gleich  $\frac{2}{3\sqrt{3}} z^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}} zw - \frac{1}{3\sqrt{3}} w^2$  sein. Dies lässt sich aber leicht widerlegen: Sei

$$f_x = \frac{\bar{a}_{21} + \bar{a}_{11} z + \bar{a}_{20} w + \bar{a}_{01} z^2 + \bar{a}_{10} zw + \bar{a}_{00} z^2 w}{a_{00} + a_{10} z + a_{01} w + a_{20} z^2 + a_{11} zw + a_{21} z^2 w} = \dots + \frac{2}{3\sqrt{3}} z^2 + \frac{4}{3\sqrt{3}} zw - \frac{1}{3\sqrt{3}} w^2 + \dots$$

Wir setzen  $w=tz$ . Für  $t = t_{1,2} = e^{\pm \frac{4\pi}{3}}$  hat die sich ergebende Potenzreihe in  $z$  einen quadratischen Koeffizienten vom Betrag 1, also müssen für diese beiden Werte von  $t$  alle übrigen Koeffizienten verschwinden, insbesondere ist

$$\bar{a}_{21}=0, \bar{a}_{11}+\bar{a}_{20}t_1=0, \bar{a}_{11}+\bar{a}_{20}t_2=0, \text{ d.h. auch } \bar{a}_{11}=\bar{a}_{20}=0.$$

Dann hat aber  $f_x$  die Gestalt  $\frac{\bar{a}_{01}z^2+\bar{a}_{10}zw+\bar{a}_{00}z^2w}{a_{00}+a_{10}z+a_{01}w}$  und der

Koeffizient von  $w^2$  in der Potenzreihenentwicklung verschwindet, während er gleich  $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$  sein müsste.

### §7. Hauptsatz über das reine Koeffizientenproblem.

Die Untersuchungen in §4 - §6 bezogen sich vor allem auf die Koeffizientenkörper  $K_{mn}$ , d.h. auf die Frage, wann ein gegebenes Koeffizientensystem  $\mathcal{C}_{mn} = (c_{00}, \dots, c_{mn})$  als System der ersten  $(m+1)(n+1)$  Entwicklungskoeffizienten einer Funktion  $f(z,w)$  aus  $F$  auftritt. Als notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung ergab sich hierfür  $D_{mn}(\lambda; \mathcal{C}_{mn}) > 0$  für  $\lambda > 1$ . Interessiert man sich jedoch nur für das reine Koeffizientenproblem, so ist statt eines endlichen Systems  $\mathcal{C}_{mn}$  ein vollständiges System  $\{c_{ik}: i, k=0, 1, \dots\}$  vorgegeben, und man hat zu untersuchen, ob die damit gebildete Funktion  $f(z,w) = \sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$  zu  $F$  gehört. Notwendig dafür ist jedenfalls  $D_{mn}(\lambda; \mathcal{C}_{mn}) > 0$  für  $\lambda > 1$  und alle Paare  $(m,n)$ . Wir wollen zeigen, dass diese Bedingungen zusammengekommen auch hinreichend sind.

Satz 13.  $f(z,w) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$  sei eine formale Potenzreihe und es gelte  $D_{mn}(\lambda; \mathcal{C}_{mn}) > 0$  für  $\lambda > 1$  und alle Paare  $(m,n)$  nichtnegativer ganzen Zahlen  $m,n$ . Dann ist  $f$  aus  $F$ .

Beweis:

Wir wissen schon, dass  $D_{mn}(\lambda; \mathcal{C}_{mn}) > 0$  für  $\lambda > 1$  gleichbedeutend damit ist, dass die zur Matrix  $\begin{pmatrix} E & \Gamma_{mn} \\ \Gamma_{mn}^+ & E \end{pmatrix}$  gehörige

hermitesche Form nichtnegativ definit ist. Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda E & \Gamma_{mn}^+ \\ \Gamma_{mn}^+ & \lambda E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda E & 0 \\ \Gamma_{mn}^+ & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \frac{1}{\lambda} \Gamma_{mn}^+ \\ 0 & \lambda E - \frac{1}{\lambda} \Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+ \end{pmatrix} \text{ für } \lambda \neq 0 \text{ folgt}$$

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda E & \Gamma_{mn}^+ \\ \Gamma_{mn}^+ & \lambda E \end{pmatrix} \right| = |\lambda^2 E - \Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+|, \text{ und das bedeutet, dass auch die}$$

zur Matrix  $E - \Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+$  gehörige hermitesche Form nichtnegativ definit ist.

Berechnung von  $\Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+$  :

$$\Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+ = \begin{pmatrix} C_0^+ & & \\ \vdots & \ddots & \\ C_m^+ & & C_0^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 & \dots & C_m \\ & \ddots & \\ & & C_0 \end{pmatrix} = (C_i^+ C_k + C_{i-1}^+ C_{k-1} + \dots) =$$

$$= \left( \sum_{j=0}^{\min(i,k)} C_{i-j}^+ C_{k-j} \right) \quad (i, k = 0, \dots, m).$$

$$\sum_{j=0}^{\min(i,k)} C_{i-j}^+ C_{k-j} \quad \text{ist dabei selbst wieder eine } (n+1)\text{-reihige}$$

Matrix, deren Glied an der Stelle (r,s) gegeben ist durch

$$\gamma_{ir,ks} = \sum_{j=0}^{\min(i,k)} \sum_{t=0}^{\min(r,s)} \bar{C}_{i-j,r-t} C_{k-j,s-t}.$$

Also ist  $\Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+ = (\gamma_{ir,ks})_{\substack{i,k=0,\dots,m \\ r,s=0,\dots,n}}$ , und die zu

$\Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}^+$  gehörige hermitesche Form lautet:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i,k=0}^m \sum_{r,s=0}^n \gamma_{ir,ks} \bar{x}_{ir} x_{ks} = \sum_{j=0}^m \sum_{t=0}^n \sum_{i,k=j}^m \sum_{r,s=t}^n C_{k-j,s-t} \bar{x}_{ks} \bar{C}_{i-j,r-t} x_{ir} = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{t=0}^n \sum_{p,q=0}^{m-j} \sum_{v,w=0}^{n-t} C_{pv} x_{p+j,v+t} \bar{C}_{qw} \bar{x}_{q+j,w+t} = \sum_{j=0}^m \sum_{t=0}^n \left| \sum_{p=0}^{m-j} \sum_{v=0}^{n-t} C_{pv} x_{p+j,v+t} \right|^2. \end{aligned}$$

Da die zur Matrix  $E = \Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}$  gehörige hermitesche Form nichtnegativ definit ist, gilt die Ungleichung

$$\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\alpha=0}^{m-i} \sum_{\beta=0}^{n-k} c_{\alpha\beta} x_{i+\alpha, k+\beta} \right|^2 \leq \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n |x_{ik}|^2 \quad \text{für alle komplexen } x_{ik}. \quad \text{Wir setzen speziell } x_{ik} = z^i w^k.$$

Für  $|z|=1$ ,  $|w|=1$  gilt dann

$$(1) \quad \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\alpha=0}^{m-i} \sum_{\beta=0}^{n-k} c_{\alpha\beta} z^{i+\alpha} w^{k+\beta} \right|^2 = \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \left| \sum_{\alpha=0}^{m-i} \sum_{\beta=0}^{n-k} c_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} \right|^2 \leq (m+1)(n+1).$$

Durch Anwendung des Maximumprinzips auf die Funktionen

$$\sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n \varepsilon_{ik} \left( \sum_{\alpha=0}^{m-i} \sum_{\beta=0}^{n-k} c_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} \right)^2, \quad \text{wo die } \varepsilon_{ik} \text{ beliebige Zahlen vom Betrag } 1 \text{ sind, folgt, dass die letztere Ungleichung für alle } (z, w) \in \bar{Z} \text{ gilt.}$$

Daraus kann man zunächst schliessen, dass (für  $i=k=0$ )

$$\left| \sum_{\alpha=0}^m \sum_{\beta=0}^n c_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} \right| \leq \sqrt{m+1} \cdot \sqrt{n+1} \quad \text{ist und infolgedessen} \\ |c_{\alpha\beta}| \leq \sqrt{m+1} \cdot \sqrt{n+1} \quad \text{für } \alpha \leq m, \beta \leq n. \quad \text{Aus der Abschätzung}$$

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{mn} z^m w^n \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{m+1} |z|^m \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |w|^n \quad \text{folgt damit die Konvergenz von } f \text{ im Dizylinder } Z.$$

Die Beschränktheit von  $f$  ergibt sich so:  $(z, w)$  sei ein beliebiger aber fester Punkt aus  $Z$  und  $\varepsilon$  eine Zahl  $>0$ . Dann

$$\text{gibt es Zahlen } M, N, \text{ so dass für } f_{j1}(z, w) = \sum_{\alpha=0}^j \sum_{\beta=0}^l c_{\alpha\beta} z^{\alpha} w^{\beta} \\ \text{die Ungleichung } |f_{j1}(z, w) - f(z, w)| < \varepsilon \text{ besteht, sobald } j \geq M, l \geq N.$$

Es ist dann auch

$$||f_{j1}(z,w)|^2 - |f(z,w)|^2| < \epsilon (|f_{j1}(z,w)| + |f(z,w)|) < \epsilon (2|f(z,w)| + \epsilon).$$

Ferner folgt aus (1) für  $m \geq M$ ,  $n \geq N$  :

$$\sum_{i=0}^{m-M} \sum_{k=0}^{n-N} |f_{m-i, n-k}(z,w)|^2 = \sum_{j=M}^m \sum_{l=N}^n |f_{jl}(z,w)|^2 \leq (m+1)(n+1).$$

Daher ist  $(m+1-M)(n+1-N) \{ |f(z,w)|^2 - \epsilon (2|f(z,w)| + \epsilon) \} \leq (m+1)(n+1)$ ,

$$(|f(z,w)| - \epsilon)^2 - 2\epsilon^2 \leq \frac{(m+1)(n+1)}{(m+1-M)(n+1-N)}.$$

Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$  liefert

$$(|f(z,w)| - \epsilon)^2 \leq 1 + 2\epsilon^2 < (1 + \epsilon^2)^2, \quad |f(z,w)| < 1 + \epsilon + \epsilon^2.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Von einer Lösung des Koeffizientenproblems kann jedoch genau genommen erst dann gesprochen werden, wenn sich aus den Bedingungen  $D_{mn}(\lambda; \epsilon_{mn}) > 0$  für  $\lambda > 1$  der Parameter  $\lambda$  eliminieren lässt. Dies ist leicht möglich: Es wurde schon gezeigt, dass diese Bedingungen gleichwertig sind damit, dass die Matrizen  $E - \Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}$  nichtnegativ definit sind. Eine  $k$ -reihige hermitesche Matrix  $A$  ist aber genau dann nichtnegativ definit, wenn in dem charakteristischen Polynom

$$P(x) = |xE + A| = \sum_{i=0}^k a_i x^i = \prod_{i=1}^k (x + \lambda_i) \quad \text{die Koeffizienten}$$

$a_0, \dots, a_{k-1}$  alle  $\geq 0$  sind. Sind nämlich die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  alle  $\geq 0$ , so auch die  $a_i$ . Sind umgekehrt alle  $a_i \geq 0$ , so ist wegen  $a_k = 1$   $P(x) > 0$  für  $x > 0$ . Wäre aber ein  $\lambda_i < 0$ , so würde

$P(x)$  für  $x = -\lambda_i > 0$  verschwinden. Wegen der Invarianz des charak-

teristischen Polynoms sind die  $a_1$  gewisse Polynome in den Elementen der Matrix A.

Somit lässt sich die Bedingung, dass  $E - \Gamma_{mn}^+ \Gamma_{mn}$  nicht-negativ definit ist, durch ein System von Ungleichungen in den Koeffizienten  $c_{ik}$ ,  $\bar{c}_{ik}$  ersetzen.

#### §8. Approximation durch Schrankenfunktionen.

Nachdem wegen Satz 12 kein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Randpunkten von  $K_{mn}$  und den  $(m,n)$ -Schrankenfunktionen besteht, erscheint es fraglich, ob den Schrankenfunktionen von zwei Veränderlichen überhaupt so grosse Bedeutung zukommt, wie dies bei einer Veränderlichen der Fall ist. Auf der anderen Seite besagt Satz 13, dass die Gesamtheit aller Körper  $L_{mn}$  ( $m,n=0,1,\dots$ ) koeffizientenmässig zu einer vollständigen Beschreibung der Funktionenfamilie  $F$  ausreicht. Da nun die Körper  $L_{mn}$  in unmittelbarem Zusammenhang mit den  $(m,n)$ -Schrankenfunktionen stehen, ist zu hoffen, dass auch die Gesamtheit aller Schrankenfunktionen zur Beschreibung von  $F$  ausreicht, und zwar im Sinne der Approximation. Diese fundamentale Eigenschaft der Schrankenfunktionen soll jetzt bewiesen werden:

Satz 14. Jedes  $f \in F$  kann durch eine Schrankenfunktion beliebig genau kompakt approximiert werden, d.h. zu  $r < 1$  und  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Schrankenfunktion  $g$  mit  $|g(z,w) - f(z,w)| < \varepsilon$  für  $|z| \leq r$ ,  $|w| \leq r$ .

Bemerkung: Die Aussage dieses Satzes ist nicht so scharf wie das entsprechende Ergebnis (2b) der Einleitung. Das liegt daran, dass der gradmässige Zusammenhang zwischen Schrankenfunktionen und Repräsentantenkörpern bei zwei Veränderlichen verletzt ist. Aus diesem Grund ist es auch nötig, den Beweis ganz unabhängig von den vorangehenden Koeffizientenuntersuchungen zu führen.

Beweis:

a) Approximation von  $f$  durch ein Polynom.

Sei  $f(z, w) = \sum_{i, k=0}^{\infty} c_{ik} z^i w^k$ ,  $f_{\varrho}(z, w) = \sum_{i, k=0}^{\infty} c_{ik} \varrho^{i+k} z^i w^k$ . Dann ist  $f_{\varrho} \in \mathbb{F}$  und in  $\bar{Z}$  holomorph für jedes  $\varrho < 1$ . In  $\bar{Z}_r = \{(z, w) : |z| \leq r, |w| \leq r\}$  ist  $f(z, w)$  gleichmässig stetig, also  $|f(z, w) - f_{\varrho}(z, w)| = |f(z, w) - f(\varrho z, \varrho w)| < \frac{\varepsilon}{3}$  für hinreichend grosses  $\varrho$ .  $\varrho$  sei von nun an fest. Wenn  $f$  nicht eine Konstante vom Betrag 1 ist (wo der Satz trivialerweise richtig ist), nimmt  $f$  in  $\bar{Z}_{\varrho}$ , also auch  $f_{\varrho}$  in  $\bar{Z}$  den Betrag 1 nicht an. Für ein geeignetes  $\delta > 0$  gilt also  $|f_{\varrho}| < 1 - \delta$  in  $Z$ .

$f_{\varrho}$  ist in  $\bar{Z}$  gleichmässiger Limes seiner Partialsummen

$S_M = \sum_{i+k \leq M} c_{ik} \varrho^{i+k} z^i w^k$ , also ist für hinreichend grosses  $M$

$|f_{\varrho}(z, w) - S_M(z, w)| < \min(\frac{\varepsilon}{3}, \delta)$  für alle  $(z, w) \in \bar{Z}$ . Insbesondere ist dann auch  $|S_M(z, w)| < 1$  in  $\bar{Z}$ .  $M$  sei ferner so gross gewählt, dass  $\sum_{i+k > M} r^{i+k} < \frac{\varepsilon}{3}$  ist.

b) Approximation von  $S_M$  durch eine Schrankenfunktion  $g$ .

$g(z, w) = \frac{S_M(z, w) + z^{M+1} w^{M+1}}{1 + zw S_{M+1}^*(z, w)}$  ist eine Schrankenfunktion. Denn

$$S_M^*(z, w) = \sum_{i+k \leq M} \bar{c}_{ik} z^{i+k} w^{M-i-k} \quad \text{stimmt auf } B \text{ dem Betrage}$$

nach mit  $S_M(z, w)$  überein, woraus nach dem Maximumprinzip

$|S_M^*(z, w)| < 1$  in  $\bar{Z}$  folgt. Daher ist  $g$  in  $\bar{Z}$  holomorph. Ferner

hat  $g$  die für eine  $(M+1, M+1)$ -Schränkenfunktion geforderte Gestalt. Entwickelt man nun  $g$  in eine Potenzreihe, so sieht man, dass die Glieder mit  $i+k \leq M$  mit denen von  $S_M$  übereinstimmen. Der Rest der Potenzreihe lässt sich, da jeder Koeffizient einen Betrag  $\leq 1$  hat, in  $\bar{Z}_r$  abschätzen durch

$$\sum_{i+k > M} r^{i+k}. \quad \text{Also gilt } |g(z, w) - S_M(z, w)| \leq \sum_{i+k > M} r^{i+k} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in}$$

$\bar{Z}_r$ . Zusammen mit den Abschätzungen unter a) folgt

$$|g(z, w) - f(z, w)| < \varepsilon \quad \text{für } (z, w) \in \bar{Z}_r.$$

Literaturverzeichnis

- [1] C. Carathéodory: Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen; über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen  
Ges. math. Schriften, Band III, S.54-77 bzw. S.78-110  
Verlag C.H.Beck, München 1955.
- [2] I. Schur: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind, Journal für Mathematik,  
Band 147 (1917), S.205-232.
- [3] H.I. Achieser: Vorlesungen über Approximationstheorie,  
Akademie-Verlag Berlin 1953, S.270-277.
- [4] J.Peschl - F.Erwe: Über beschränkte Systeme von Funktionen,  
Math. Annalen 126 (1953), S.185-220.
- [5] L.H. Loomis: An Introduction to Abstract Harmonic Analysis,  
New York 1953.

## Lebenslauf

Ich wurde am 30. Juli 1934 als Sohn des Bankkaufmanns Gottfried Pfister und seiner Ehefrau Maria, geb. Stürzer, in München geboren.

Im Herbst 1941 trat ich in die Volksschule an der Simmernstrasse in München ein. Nach dem Besuch der Volksschulen in Schönau bei Bad Aibling und Oberding bei Erding trat ich im November 1945 in die Oberschule Icking im Isartal über. Seit 1950 war ich an der Maria-Theresia-Oberrealschule in München, wo ich im Juli 1953 die Reifeprüfung ablegte.

Im Wintersemester 1953-54 begann ich an der Universität München das Studium der Mathematik und Physik. Ich hörte Vorlesungen bei G. Aumann, F. Bopp, W. Gerlach, W. Heisenberg, M. Kneser, W. Maak, O. Perron, H. Richter, W. Rollwagen, F. Schmeidler und K. Stein. Im Herbst 1957 bestand ich das Staatsexamen für das Lehramt an höheren Schulen in Bayern.

Seit Sommer 1956 bin ich als Hilfsassistent, seit 1. Mai 1959 als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München beschäftigt.

Dezember 1960

*Albrecht Pfister*





